Punkty i wektory w $\mathbb{R}^3$

- Punkty oznaczamy $P = (x, y, z)$. Wektor $\overrightarrow{OP} = [x, y, z]$ nazywamy *wektorem wodzącym* punktu P.
- Dla dowolnych punktów $A = (a_1, a_2, a_3)$ i $B = (b_1, b_2, b_3)$ współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ wyznaczamy odejmując od współrzędnych końca współrzędne początku czyli
$$\overrightarrow{AB} = [b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3].$$
- Współrzędne końca wektora $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{PQ} = [x_1, x_2, x_3]$ zaczepionego w punkcie $P = (p_1, p_2, p_3)$ wyznaczamy dodając do współrzędnych początku współrzędne wektora czyli
$$Q = P + \overrightarrow{r} = (p_1 + x_1, p_2 + x_2, p_3 + x_3).$$
- Długość wektora $\overrightarrow{r} = [x_1, x_2, x_3]$ wyraża się wzorem:
$$|\overrightarrow{r}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$
- Iloczyn skalarny wektorów $\overrightarrow{a} = [a_1, a_2, a_3]$ i $\overrightarrow{b} = [b_1, b_2, b_3]$:
$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}).$$
- Kąt pomiędzy wektorami $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ wyznaczamy ze wzoru:
$$\cos\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \frac{\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}.$$
- Punkty P, Q, R są ***współliniowe*** (tzn. leżą na jednej prostej) gdy wektory $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}$ są liniowo zależne (czyli proporcjonalne).
- Punkty P, Q, R, S są ***współpłaszczyznowe*** (tzn. leżą w jednej płaszczyźnie) gdy wektory $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}$ są liniowo zależne.

Przykład: 1. Sprawdzić czy punkty $P = (1, 1, 1)$, $Q = (2, 1, 2,)$, $R = (3, 4, 3)$, $S = (2, 2, 2)$ są współpłaszczyznowe.

Iloczyn wektorowy

Def. 1. Mówimy, że układ wektorów $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3)$ jest zorientowany zgodnie z bazą, gdy wyznacznik macierzy współrzędnych tych wektorów w tej bazie jest dodatni.

Def. 2. *Iloczynem wektorowym* wektorów $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ nazywamy:

1. wektor $\overrightarrow{w}$ ortogonalny do $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, którego długość jest równa polu równoległoboku rozpiętego na $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i taki że układ $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{w})$ jest zorientowany zgodnie z bazą, gdy $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ są liniowo niezależne,
2. wektor zerowy $\overrightarrow{\theta}$, gdy $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ są liniowo zależne.

   Iloczyn wektorowy oznaczamy $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$.

Postać analityczna iloczynu wektorowego

Twierdzenie 1.

$$[a_1, a_2, a_3] \times [b_1, b_2, b_3] = \left[\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right]$$

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$, *gdzie* $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ *są wektorami bazy kanonicznej.*

Własności iloczynu wektorowego:

1. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$,
2. $\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}$,
3. $(c\overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = c(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{a} \times (c\overrightarrow{b})$,
4. $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \sin\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$

Iloczyn mieszany

Def. 3. *Iloczynem mieszanym* wektorów $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ nazywamy $\overrightarrow{a} \circ (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$.

Twierdzenie 2. $\overrightarrow{a} \circ (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

Wn. 1. *1. Objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$: $V(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = |\overrightarrow{a} \circ (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})| = \left| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \right|$.

2. Objętość czworościanu o wierzchołkach P, Q, R, S: $V(P, Q, R, S) = \frac{1}{6}|\overrightarrow{a} \circ (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})|$, *gdzie* $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{PS}$.

Płaszczyzna w E^3

Twierdzenie 3 (Postać normalna płaszczyzny)**.** *Dla dowolnego wektora* $\overrightarrow{N} = [A, B, C] \neq \overrightarrow{\theta}$ *i punktu* $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ *równanie*

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

opisuje płaszczyznę prostopadłą do $\overrightarrow{N}$ *i przechodzącą przez* P_0 *(*$\overrightarrow{N}$ *nazywamy wektorem normalnym tej płaszczyzny).*

Inne postaci równania płaszczyzny:

- Postać ogólna: $Ax + By + Cz + D = 0$.
- Postać odcinkowa: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.
- Postać parametryczna: $P = P_0 + u\overrightarrow{a} + v\overrightarrow{b}$, gdzie $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ są liniowo niezależne.

  Przykład: 2. Wyznaczyć równanie płaszczyzny przechodzącej przez dane punkty $P = (0, 1, 1)$; $Q = (2, 3, 4)$; $R = (4, 2, 1)$.

Uwaga 1. Mając dane wektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ równoległe do płaszczyzny, wektor normalny płaszczyzny wyznaczymy najprościej za pomocą iloczynu wektorowego

$$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}.$$

Równanie pęku płaszczyzn:

- $\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$.

  Przyjmując dowolne $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ otrzymujemy równanie płaszczyzny współpękowej z danymi tzn. przechodzącej przez ich krawędź (gdy się przecinają) lub równoległej do nich (gdy są równoległe).

  Kąt pomiędzy płaszczyznami Π_1, Π_2 o wektorach normalnych odpowiednio $\overrightarrow{N}_1, \overrightarrow{N}_2$:

- $\cos\angle(\Pi_1, \Pi_2) = \left|\dfrac{\overrightarrow{N}_1 \circ \overrightarrow{N}_2}{|\overrightarrow{N}_1| \cdot |\overrightarrow{N}_2|}\right|$.

Prosta w E^3

Postać parametryczna prostej o danym wektorze kierunkowym $\overrightarrow{k} \neq \overrightarrow{\theta}$, przechodzącej przez punkt P_0:

- $X = P_0 + t\overrightarrow{k}$ gdzie $t \in \mathbb{R}$.

Dla $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i $\overrightarrow{k} = [a, b, c]$ dostajemy:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Postać kanoniczna:

- $$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Zredukowana postać kanoniczna prostej równoległej do płaszczyzny Oxy:

- $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}, \qquad z = z_0.$

Kąty i odległości

Kąt pomiędzy prostymi l_1, l_2 o wektorach kierunkowych odpowiednio $\overrightarrow{k}_1$, $\overrightarrow{k}_2$:

- $\cos\angle(l_1, l_2) = \left|\dfrac{\overrightarrow{k}_1 \circ \overrightarrow{k}_2}{|\overrightarrow{k}_1| \cdot |\overrightarrow{k}_2|}\right|.$

Kąt pomiędzy prostą l o wektorze kierunkowym $\overrightarrow{k}$ i płaszczyzną Φ o wektorze normalnym $\overrightarrow{N}$:

- $\sin\angle(l, \Phi) = \left|\dfrac{\overrightarrow{k} \circ \overrightarrow{N}}{|\overrightarrow{k}| \cdot |\overrightarrow{N}|}\right|.$

Odległość punktu $P = (x_0, y_0, z_0)$ od płaszczyzny $\Phi: \ Ax + By + Cz + D = 0$:

- $\mathbf{d}(P, \Phi) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$

Odległość punktu P od prostej $l: \ X = P_0 + t\,\overrightarrow{k}$:

- $\mathbf{d}(P, l) = \dfrac{|\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{P_0P}|}{|\overrightarrow{k}|}.$

Przykłady powierzchni

1. sfera $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$
2. stożek $z^2 = x^2 + y^2$
3. paraboloida obrotowa $z = x^2 + y^2$

4. powierzchnia powstała w wyniku obrotu krzywej $z = f(y);\ x = 0$ wokół osi Oz
$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$$

5. paraboloida hiperboliczna
$$z = xy$$
lub
$$z = x^2 - y^2$$

Przykłady:

1. Wyznaczyć punkt symetryczny do $P = (3, 1, -1)$ względem płaszczyzny $\Pi:\ 3x + y + z = 20$.

2. Wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez punkt $O = (0, 0, 0)$ i przecinającej prostopadle prostą $x - 3 = y - 3 = \frac{z}{2}$.

3. Z pęku zawierającego płaszczyzny $\Pi_1:\ 4x-y+3z-6 = 0$ i $\Pi_2:\ x+5y-z+10 = 0$ wybrać płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny $\Omega:\ 2x-y+5z = 0$.