

Przestrzeń wektorowa $\mathbb{R}^n$

Def. 1. Rzeczywistą n -wymiarową przestrzenią wektorową (liniową) $\mathbb{R}^n$ nazywamy zbiór n -wyrazowych ciągów liczb rzeczywistych $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ z następującymi działaniami dodawania wektorów i mnożenia wektorów przez liczby: $[x_1, x_2, \dots, x_n] + [y_1, y_2, \dots, y_n] := [x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n]$, $a \cdot [x_1, x_2, \dots, x_n] := [a \cdot x_1, a \cdot x_2, \dots, a \cdot x_n]$. wektory oznaczamy:

$$\vec{x} := [x_1, x_2, \dots, x_n].$$

Iloczynem skalarnym wektorów $\vec{x}, \vec{y}$ nazywamy liczbę: $\vec{x} \circ \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$. Wektory $\vec{x}, \vec{y}$ nazywamy *prostopadłymi* gdy $\vec{x} \circ \vec{y} = 0$. *Długością* wektora $\vec{x}$ nazywamy $\sqrt{\vec{x} \circ \vec{x}}$.

Własności przestrzeni $\mathbb{R}^n$

Wektor zerowy to $\vec{0} := [0, 0, \dots, 0]$

1. $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$
2. $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
3. dla każdego $\vec{x}$ istnieje $\vec{y}$, taki że $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$
(wektor przeciwny $\vec{y} = -\vec{x}$)
4. $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$
5. $a(\vec{x} + \vec{y}) = a\vec{x} + a\vec{y}$
6. $(a + b)\vec{x} = a\vec{x} + b\vec{x}$
7. $a(b\vec{x}) = (ab)\vec{x}$

Uwaga 1. Dowolny zbiór "wektorów" V z działaniami dodawania i mnożenia przez liczby, które spełniają warunki 1.,...,7. nazywamy *przestrzenią liniową*.

Liniowa niezależność wektorów

Def. 2. Kombinacją liniową wektorów $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$ o współczynnikach $a_1, a_2, \dots, a_k$ nazywamy wektor

$$\sum_{i=1}^k a_i \vec{x}_i = a_1 \vec{x}_1 + a_2 \vec{x}_2 + \dots + a_k \vec{x}_k.$$

Def. 3. Mówimy, że wektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$ są *liniowo niezależne* gdy z zerowania się dowolnej ich kombinacji liniowej wynika zerowanie się wszystkich współczynników tej kombinacji.

$$\sum_{i=1}^k a_i \vec{x}_i = \vec{0} \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0.$$

Uwaga 2. Wektory są liniowo zależne gdy istnieją takie $a_1, a_2, \dots, a_k$, nie wszystkie równe 0, że $\sum_{i=1}^k a_i \vec{x}_i = \vec{0}$.

Twierdzenie 1. Wektory są liniowo zależne $\Leftrightarrow$ jeden z nich można zapisać jako kombinację liniową pozostałych.

Def. 4. Maksymalny układ wektorów liniowo niezależnych nazywamy *bazą*. Ilość wektorów bazy nazywamy *wymiarem przestrzeni*. *Bazę kanoniczną* przestrzeni $\mathbb{R}^3$ tworzą wektory $[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]$. Analogicznie dla dowolnego n .

Twierdzenie 2. Wektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ tworzą bazę przestrzeni $\Leftrightarrow$ każdy wektor można zapisać jednoznacznie w postaci ich kombinacji liniowej.

Macierz

Def. 5. Niech $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$. *Macierz* o m wierszach i n kolumnach nazywamy dowolną funkcję, która wszystkim parom (i, j) przyporządkowuje liczby rzeczywiste a_{ij} . Stosujemy oznaczenia: $A, A_{m \times n}, (a_{ij}), (a_{ij})_{m \times n}$.

Macierz zapisujemy:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Wiersze macierzy są wektorami przestrzeni $\mathbb{R}^n$ a kolumny $\mathbb{R}^m$. Macierz można natomiast traktować jako wektor przestrzeni $\mathbb{R}^{m \cdot n}$. $(m \times m)$ -macierze nazywamy *kwadratowymi*.

Działania na macierzach

Macierze o tych samych wymiarach dodajemy i mnożymy przez liczby tak samo jak wektory przestrzeni $\mathbb{R}^{m \cdot n}$ tzn.:

$$c \cdot (a_{ij})_{m \times n} := (c \cdot a_{ij})_{m \times n}; \quad (a_{ij})_{m \times n} + (b_{ij})_{m \times n} := (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}.$$

Zbiór $(m \times n)$ -macierzy z tak określonymi działaniami jest przestrzenią liniową. Oznaczamy ją $\mathbf{M}_{m \times n}$.

Def. 6. Iloczynem macierzy $(a_{ij})_{m \times k}$ i $(b_{ij})_{k \times n}$ nazywamy macierz $(c_{ij})_{m \times n}$, której współczynniki są określone wzorem:

$$c_{ij} := \sum_{l=1}^k a_{il} \cdot b_{lj}.$$

(wyraz c_{ij} macierzy wyniku jest iloczynem skalarnym i -tego wiersza pierwszej i j -tej kolumny drugiej macierzy.)

Uwaga 3. Mnożymy macierze tylko gdy wiersze pierwszej są tej samej długości co kolumny drugiej czyli gdy pierwsza ma tyle samo kolumn co druga wierszy.

Uwaga 4. Mnożenie macierzy nie jest przemienne!

- Transpozycją macierzy $A = (a_{ij})_{m \times n}$ nazywamy macierz $A^T = (a_{ji})_{n \times m}$ czyli taką, której wierszami są kolumny macierzy A (a kolumnami oczywiście wiersze macierzy A).

Macierz kwadratową (a_{ij}) nazywamy:

diagonalną gdy $a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$,

trójkątną górną gdy $a_{ij} = 0$ dla $i > j$,

trójkątną dolną gdy $a_{ij} = 0$ dla $i < j$.

- Macierzą jednostkową nazywamy macierz diagonalną, dla której dodatkowo $a_{ii} = 1$ czyli na głównej przekątnej stoją jedynki. Macierze jednostkowe oznaczamy I lub I_n gdy chcemy podać wymiar.
- Macierzą odwrotną do macierzy kwadratowej A nazywamy macierz A^{-1} , taką że $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

Własności działań na macierzach

Jeśli tylko wskazane działania można wykonać, to:

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$
2. $A + B = B + A$
3. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
4. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
5. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
6. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
7. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Przykład: 1. Wyznaczyć macierze X, Y z równań:

- $A \cdot X + B = C$
- $Y \cdot D - E = Y \cdot F$.

Rząd macierzy

Twierdzenie 3. *W dowolnej macierzy maksymalna ilość liniowo niezależnych wierszy jest równa maksymalnej ilości liniowo niezależnych kolumn.*

Def. 7. Rzędem macierzy A nazywamy maksymalną liczbę jej liniowo niezależnych wierszy (lub kolumn). Rząd macierzy A oznaczamy rA .

Twierdzenie 4. *Rząd macierzy A nie zmienia się gdy:*

1. dowolny wiersz pomnożymy przez liczbę różną od zera,

2. dowolnie zmienimy kolejność wierszy,
3. do dowolnego wiersza dodamy kombinację liniową pozostałych,
4. wykreślimy wiersz złożony z samych zer,
5. przetransponujemy macierz,
6. wykonamy jakąkolwiek z operacji 1.2.3.4. na kolumnach.

Przykład: 2.

$$r \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 4.$$

Twierdzenie 5. Jeżeli w macierzy A :

1. pierwszy niezerowy wyraz każdego wiersza jest równy 1 (nazywamy go jedyneką główną),
2. w każdym prostokącie, który w prawym górnym rogu ma jedynekę główną, oprócz niej są same zera,

to $\text{rang } A$ jest równy ilości głównych jedynek.

Wyznaczanie rzędu macierzy metodą eliminacji Gaussa

Dowolną macierz sprowadzamy do postaci podanej w twierdzeniu za pomocą operacji, które nie zmieniają rzędu:

1. Jedynekę główną dostajemy dzieląc wiersz przez odpowiednią stałą (pierwszy wyraz),
2. zera pod jedynekami głównymi dostajemy odejmując odpowiednie kombinacje wiersza z daną jedyneką główną od wierszy znajdujących się niżej.

Przykłady: 1. 1. Wyznaczyć rzędy danych macierzy: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

2. Sprawdzić, czy wektory $[1, 1, 1]$, $[1, 2, 3]$ i $[2, 4, 8]$ są bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$.