Literatura

- T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra liniowa 1*

  Definicje, twierdzenia, wzory

  Przykłady i zadania
- (B. Gleichgewicht *Algebra*)
- M. Gewert, Z.Skoczylas, Analiza matematyczna 1

  Definicje, twierdzenia, wzory

  Przykłady i zadania
- W. Krysicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach*, część I (II)
- W. Stankiewicz, J.Wojtowicz *Zadania z matematyki dla wyższych uczelni technicznych*, część I (II)

Ciało liczb zespolonych

Def. 1. Ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$ nazywamy zbiór uporządkowanych par liczb rzeczywistych z następującymi działaniami dodawania i mnożenia:

$$(a,b)+(c,d):=(a+c,b+d),$$

$$(a,b)\cdot(c,d):=(ac-bd,ad+bc).$$

Postać algebraiczna:

$$z=x+yi$$

x-część rzeczywista, y-część urojona. Liczby w postaci algebraicznej mnożymy jak wyrażenia algebraiczne uwzględniając równość:

$$i^2=-1$$

Def. 2. Sprzężeniem liczby zespolonej $z=x+yi$ nazywamy liczbę zespoloną:

$$\overline{z}=x-yi.$$

Reguła dzielenia: Licznik i mianownik mnożymy przez sprzężenie mianownika. **Własności sprzężenia**:

1. $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$
2. $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$
3. $\overline{z^n}=\overline{z}^n$
4. $\overline{z}=z \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$

5. $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}$

Twierdzenie 1. *Jeżeli liczba zespolona z jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach rzeczywistych, to liczba $\overline{z}$ również.*

Twierdzenie 2 (Zasadnicze twierdzenie algebry)**.** *Każdy zespolony wielomian stopnia $n \geq 1$ ma pierwiastek w ciele liczb zespolonych $\mathbb{C}$.*

Moduł i argument liczby zespolonej

Def. 3. Modułem liczby zespolonej $z = x + yi$ nazywamy liczbę rzeczywistą:

$$|z| := \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Argumentem liczby z nazywamy dowolny kąt φ, taki że

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{|z|}.$$

Piszemy $arg z$. Dokładnie jeden argument danej liczby jest zawarty w przedziale $[0, 2\pi)$. Nazywamy go argumentem głównym i oznaczamy Arg$z$. **Interpretacja geometryczna:** Argument jest kątem pomiędzy dodatnią półosią rzeczywistą i promieniem wodzącym punktu reprezentującego daną liczbę, a moduł odległością tego punktu od początku układu współrzędnych.

Postać trygonometryczna liczby zespolonej

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

gdzie r jest modułem a φ argumentem liczby z.

Przykład: 1. 1. Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej zbiór liczb spełniających warunki

$$\begin{cases} |z| \leq 2 \\ \frac{\pi}{4} \leq Arg z \leq \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

2. Równanie $|z - z_0| = r$ opisuje okrąg o środku z_0 i promieniu r.

Ważne wzory trygonometryczne:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Mnożenie liczb w postaci trygonometrycznej

$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$
(Mnożąc liczby zespolone mnożymy ich moduły i dodajemy argumenty.)

Twierdzenie 3 (Wzory Moivre'a)**.** *Dla dowolnej liczby zespolonej* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *i liczby naturalnej* n *zachodzi:*

1. $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$,
2. *istnieje dokładnie* n *różnych pierwiastków* $\sqrt[n]{z}$*, które wyrażają się wzorem:*

   $$z_k = \sqrt[n]{r}(\cos\tfrac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\tfrac{\varphi+2k\pi}{n})$$

   dla $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

Przykład: 2. Wielomian $W(x) = x^4 + 4$ rozłożyć na czynniki stopnia 2.

Zasada indukcji matematycznej

Twierdzenie 4. *Jeżeli:*

1. *twierdzenie* $T(n)$ *jest prawdziwe dla liczby naturalnej* $n = 1$,
2. *dla dowolnej liczby naturalnej* n *z prawdziwości* $T(n)$ *wynika prawdziwość* $T(n+1)$,

to twierdzenie $T(n)$ *jest prawdziwe dla wszystkich liczb naturalnych.*

Uwaga 1.
1. W (1) liczbę $n = 1$ można zastąpić dowolną liczbą naturalną n_0. Wówczas w (2) zakładamy również prawdziwość implikacji dla $n \geq n_0$ i otrzymujemy prawdziwość $T(n)$ dla $n \geq n_0$.
2. W (2) można zakładać również prawdziwość twierdzenia dla wszystkich $k \leq n$. Tak określona zasada nosi nazwę indukcji zupełnej.

Przykład: 3. Udowodnić własność (3) sprzężenia tzn., że dla dowolnej liczby zespolonej z i dowolnej liczby naturlnej n zachodzi wzór $\overline{z}^n = \overline{z^n}$.