Matematyka dyskretna
seria 1 (indukcja matematyczna)

Zadanie 1 Stosując zasadę indukcji matematycznej wykazać:

a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,

b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$,

c) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$,

d) $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = 2 + (n-1) \cdot 2^{n+1}$,

e) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1) = (n+1)^2$,

f) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Zadanie 2 Udowodnić, że dla każdego naturalnego

a) $n \geqslant 7$ zachodzi $n! \geqslant 3^n$,

b) $n \geqslant 17$ zachodzi $2^n > n^4$.

Zadanie 3 Wykazać, że dla każdego naturalnego n

a) $n^7 - n$ jest podzielne przez 7,

b) $10^n - 4$ jest podzielne przez 6,

c) $4^{n+2} + 5^{2n+1}$ jest podzielne przez 21,

d) $10^n + 4^n - 2$ jest podzielne przez 3.

Zadanie 4 Udowodnić, że jeżeli $a_0 = 6, a_1 = 11$ oraz dla $n \geqslant 2$

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2},$$

to dla każdego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$a_n = 5 \cdot 2^n + 1.$$