

**Matematyka dyskretna**  
**seria 4 (tożsamości kombinatoryczne)**

**Zadanie 1** Udowodnić kombinatorycznie tożsamość

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

**Zadanie 2** Udowodnić kombinatorycznie tożsamość

$$\binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} = n^2.$$

**Zadanie 3** Udowodnić kombinatorycznie tożsamość

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2.$$

**Zadanie 4** Udowodnić kombinatorycznie tożsamość

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

*Wskazówka:* Na ile sposobów możemy wybrać z  $n$  osób delegację, w której mamy wyróżnioną osobę (kierownika)?

**Zadanie 5** Udowodnić kombinatorycznie tożsamość

$$\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}.$$

**Zadanie 6** Udowodnić kombinatorycznie tożsamość

$$\sum_{k=n}^m \binom{k}{n} = \binom{m+1}{n+1}.$$

**Zadanie 7** Udowodnić kombinatorycznie tożsamość

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) \binom{n}{k}^2 = n^2 \binom{2n-2}{n-2}.$$

**Zadanie 8** Udowodnić kombinatorycznie tożsamość

$$\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i} = 2^k \binom{n}{k}.$$

**Zadanie 9** Udowodnić kombinatorycznie tożsamość

$$\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} = 3^n.$$

*Wskazówka:* Rozważyc ciągi długości  $n$ , których elementy to 0, 1 lub 2.