

UNIwersytet WarMińsko-Mazurski w Olsztynie
Wydział Matematyki i Informatyki

Kierunek: Matematyka

Małgorzata Tomecka

Zupełnie całkowalne układy hamiltonowskie

Praca licencjacka wykonana
w Katedrze Algebry i Geometrii
pod kierunkiem
dra hab. Andriy'a Panasyuka, prof. UWM

Olsztyn, 2017 rok

UNIVERSITY OF WARMIA AND MAZURY IN OLSZTYN
FACULTY OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

Field of Study: Mathematics

Małgorzata Tomecka

Completely Integrable Hamiltonian Systems

Bachelor's Thesis is performed
in Chair of Algebra and Geometry
under supervision of
dr hab. Andriy Panasyuk, prof. UWM

Olsztyn, 2017

Spis treści

Wstęp	2
Rozdział 1. Hamiltonowskie ujęcie mechaniki klasycznej	4
1.1. Równania różniczkowe zwyczajne n -go rzędu	4
1.2. Układy równań różniczkowych 1-go rzędu zadane przez pole wektorowe	5
1.3. Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań	6
1.4. Całki pierwsze równań różniczkowych	6
1.5. II prawo mechaniki Newtona oraz układy potencjalne	8
1.6. Podejście hamiltonowskie do mechaniki układu potencjalnego	9
1.7. Nawias Poissona i jego własności. Definicja hamiltonowskiego układu równań	10
1.8. Całka pierwsza w ujęciu hamiltonowskim	12
Rozdział 2. Układy zupełnie całkowalne i twierdzenie Arnolda-Liouville’a	13
2.1. Ruch prawie okresowy na torusie	13
2.2. Układy zupełnie całkowalne	14
Rozdział 3. Problem Keplera jako układ zupełnie całkowalny	16
Rozdział 4. Dwuwymiarowy oscylator harmoniczny jako układ całkowalny	18
Bibliografia	21
Podziękowanie	22
Streszczenie	23
Abstract	24

Wstęp

Dokonania [13] Isaaca Newtona (ok. 1642-1727) i zaproponowane przez niego deterministyczne modele mechaniki (1686 r.) oraz późniejsze równania pola elektromagnetycznego Maxwella ugruntowały ówczesny pogląd o uniwersalizmie zasady determinizmu poznawczego. Matematycy powszechnie uważali, że modele matematyczne, głównie opierające się na równaniach różniczkowych, przy znajomości stanu początkowego układu, potrafią w sposób ścisły i dokładny określić ewolucję układu dynamicznego. Kolejne dwa stulecia równania dynamiki Newtona zyskały ważne uogólnienia. W XVIII w. Joseph Louis Lagrange (1736-1813) przedstawił bardzo ogólną postać równań różniczkowych, opisujących układy mechaniczne spełniające prawa Newtona. Następnie Pierre Simon de Laplace (1749-1827) wyjaśnił niemal wszystkie aspekty ruchów orbitalnych w układzie słonecznym. Wreszcie już w XIX w. William Rowan Hamilton (1805-1865) przetransformował ogólne równania Lagrange'a do bardziej przydatnej (pojemnej) postaci, tworząc podstawy metody znanej obecnie jako formalizm Hamiltona.

Henri Poincaré (1854-1912) [13] w 1892 r. przedstawił analizę problemu trzech ciał związanego ze złożonym oddziaływaniem Słońca, Ziemi i Księżyca. Jako pierwszy prowadził badania stabilności układów nieliniowych oraz wskazał, iż rozwiązania nieliniowych równań różniczkowych (deterministycznych) mogą wykazywać bardzo skomplikowane zachowanie w otoczeniu niestabilnych punktów stałych. Słusznie przypuszczał, że regularne (deterministyczne) siły mogą generować w układach nieliniowych (deterministycznych) ruchy chaotyczne (losowe).

Istotnie, „chaotyczność” jest cechą większości układów mechanicznych, a przejawia się ona w tym, że przeciętna trajektoria układu tworzy zbiór gęsty w przestrzeni fazowej. W tym kontekście szczególnie ciekawe są tzw. układy zupełnie całkowalne, w których w przeciwieństwie do układów „chaotycznych” ruch odbywa się po podrozmaitościach o wymiarze równym połowie wymiaru przestrzeni fazowej.

Zupełnie całkowalne układy Hamiltonowskie [3] posiadają wystarczającą liczbę całek ruchu. Ich wspólne poziomice, jeśli są zwarte, są dyfeomorficzne z torusami odpowiedniego wymiaru. Ruch na takich torusach odbywa się w sposób linearny, prawie okresowy. Lokalna struktura takich układów jest możliwa do ukazania w możliwie klarowny sposób dzięki tzw. zmieniającym działanie-kąt, których istnienie gwarantuje twierdzenie Arnolda-Liouville'a. Konstrukcja tychże współrzędnych w poszczególnych przypadkach bywa zazwyczaj niełatwa, co odpowiada utrudnionemu całkowaniu równań ruchu, których rozwiązanie możliwe jest niekiedy wyłącznie w tzw. kwadraturach.

Układy zupełnie całkowalne są ważne, gdyż ich klasa zawiera wiele znanych układów mechaniki klasycznej, też często pojawiają się one we współczesnych dziedzinach nauk ścisłych, np. w fizyce, biologii, ekonomii.

Dana praca poświęcona jest omówieniu pojęcia całkowalnego układu hamiltonowskiego. W szczególności, w Rozdziale 1 została omówiona teoria równań różniczkowych pod kątem hamiltonowskiego ujęcia mechaniki klasycznej wraz z pojęciem nawiasu Poissona. Rozdział 2 prezentuje zagadnienia, które obejmuje klasyczna teoria całkowalnych układów hamiltonowskich, czyli m.in. twierdzenie Arnolda-Liouville'a ze współrzędnymi działanie-kąt. Rozdziały 3 i 4

zawierają dwa ważne przykłady układów zupełnie całkowalnych, tzw. układ Keplera oraz dwuwymiarowy oscylator harmoniczny. Układ Keplera oraz przypadki szczególne oscylatora harmonicznego są przykładami tzw. „supercałkowalnych” układów, t.j. układów, w których wymiar niezmienniczych torusów jest mniejszy niż połowa wymiaru przestrzeni fazowej.

W Rozdziale 1 Hamiltonowskie ujęcie mechaniki klasycznej opracowano na podstawie W.I. Arnolda [1] oraz [2], A. Panasyuka [9], W. Wojtyńskiego [14], B. Halla [6], a także M. Gewerta i Z. Skoczylasa [4]. Rozdział 2 poświęcony układom zupełnie całkowalnym, gwarantowanym przez twierdzenie Arnolda-Liouville’a, oparto na publikacji B. Jovanović’a [7], H. Żołądka [15], A. Panasyuka [8], W.I. Arnolda [1]. Przedstawienie zupełnej całkowalności układu Keplera w Rozdziale 3 wspomogło skorzystanie z prac F. Fasso [3] oraz B. Halla [6]. Natomiast w Rozdziale 4. wykorzystano przykład oscylatora zaczerpnięty z W. Wojtyńskiego [14], przedstawiono tzw. figury Lissajous na podstawie W.I. Arnolda [1] oraz B. Jovanović’a [7].

Rozdział 1

Hamiltonowskie ujęcie mechaniki klasycznej

1.1. Równania różniczkowe zwyczajne n -go rzędu

Definicja 1.1.1. [2] *Równaniem różniczkowym n -go rzędu nazywamy równanie*

$$\frac{d^n y}{dt^n} = F\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2 y}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}\right), \quad (1.1)$$

gdzie $F(u_0, u_1, \dots, u_n)$ jest funkcją różniczkowalną klasy C^r , $r \geq 1$ określoną na obszarze U .

Definicja 1.1.2. [4] *Rozwiązaniem równania różniczkowego n -go rzędu (1.1) na przedziale (a, b) nazywamy funkcję $y(t)$, jeśli na tym przedziale jest ona n -krotnie różniczkowalna i zamienia to równanie w tożsamość*

$$y^{(n)}(t) \equiv F(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t)).$$

Wykres rozwiązania równania różniczkowego nazywa się *krzywą całkową*.

Definicja 1.1.3. [4] *Zagadnieniem początkowym lub zagadnieniem Cauchy'ego nazywa się równanie różniczkowe (1.1) oraz tzw. warunek początkowy*

$$y(t_0) = y_0, \quad \dot{y}(t_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}.$$

Liczby $t_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ to wartości początkowe.

Równanie różniczkowe (1.1) można sprowadzić do układu równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu.

Twierdzenie 1.1.4. [2] *Równanie (1.1) jest równoważne układowi n -równań pierwszego rzędu*

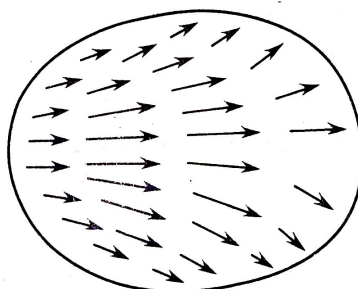
$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= y_3 \\ &\vdots \\ \dot{y}_n &= F(t, y_1, \dots, y_n) \end{aligned} \quad (1.2)$$

w tym sensie, że jeżeli φ jest rozwiązaniem równania (1.1), to wektor utworzony z pochodnych $(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}, \dots, \varphi^{(n-1)})$ jest rozwiązaniem układu (1.2), a jeśli $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ jest rozwiązaniem układu (1.2), to φ_1 spełnia równanie (1.1).

1.2. Układy równań różniczkowych 1-go rzędu zadane przez pole wektorowe

Definicja 1.2.1. [2] Niech M będzie obszarem w n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, gdzie $x_i: M \rightarrow \mathbb{R}$ są funkcjami współrzędnymi. Pole wektorowe v określone na M przyporządkowuje każdemu punktowi x obszaru M wychodzący z niego wektor $v(x) \in \mathbb{R}^n$. W układzie współrzędnych x_i pole określone jest przez n funkcji różniczkowalnych $v_i: M \rightarrow \mathbb{R}$.

Rysunek 1.2.2. [1] Pole wektorowe.



Uwaga 1.2.3. Alternatywnie na pole wektorowe możemy patrzeć jako na operator różniczkowy pierwszego rzędu $v = v_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + v_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}$ działający na funkcjach różniczkowalnych na M (por. Definicję 1.7.4 oraz [9]). Przejście pomiędzy dwoma podejściami jest natychmiastowe.

Definicja 1.2.4. [2] Niech U będzie otwartym obszarem n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej i niech v będzie polem wektorowym w U . Równaniem różniczkowym zadany przez pole wektorowe nazywamy równanie

$$\dot{y} = v(y), \quad y \in U. \quad (1.3)$$

Obszar U nazywa się *przestrzenią fazową* równania (1.3).

Definicja 1.2.5. [2] *Rozwiązaniem równania różniczkowego* (1.3) nazywamy odwzorowanie różniczkowalne $\varphi: I \rightarrow U$ przedziału $I = \{t \in \mathbb{R}, a < t < b\}$ osi rzeczywistej \mathbb{R} (dopuszcza się $a = -\infty, b = +\infty$) w przestrzeń fazową, jeśli dla każdego $\tau \in I$ jest spełniony związek $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=\tau} \varphi(t) = v(\varphi(\tau))$. Krzywą sparametryzowaną $\varphi: I \rightarrow U$ nazywamy *krzywą fazową* równania różniczkowego.

Definicja 1.2.6. Rozwiązanie $\varphi: I \rightarrow U$ równania różniczkowego (1.3) spełnia *warunek początkowy*

$$\varphi(t_0) = y_0, \quad t_0 \in \mathbb{R}, \quad y_0 \in U, \quad (1.4)$$

jeśli $a < t_0 < b$ i wartość φ w punkcie t_0 jest równa y_0 , tzn. jeśli krzywa fazowa przechodzi w chwili t_0 przez punkt y_0 .

Uwaga 1.2.7. Zauważmy, że równanie (1.3) inaczej może być zapisane jako układ równań różniczkowych pierwszego rzędu

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= v_1(y_1) \\ \dot{y}_2 &= v_2(y_2) \\ &\vdots \\ \dot{y}_n &= v_n(y_n). \end{aligned}$$

W szczególności, Twierdzenie 1.1.4 mówi, że każde równanie n -go stopnia (1.1), w którym funkcja F w sposób jawny nie zależy od czasu, jest równoważne pewnemu układowi równań zadanych przez pole wektorowe.

W przypadku zależności F od t też można mówić o podobnej relacji, z tym, że w tym przypadku pole wektorowe samo musi być zależne od t , a odpowiedni układ ma postać:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= v_1(t, y_1) \\ \dot{y}_2 &= v_2(t, y_2) \\ &\vdots \\ \dot{y}_n &= v_n(t, y_n), \end{aligned}$$

lub w wersji skrótowej

$$\dot{y} = v(t, y).$$

1.3. Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań

Twierdzenie 1.3.1. [2] Niech będzie dane równanie różniczkowe

$$\dot{x} = v(t, x), \tag{1.5}$$

którego prawa strona v jest określona i różniczkowalna w sposób ciągły w otoczeniu punktu (t_0, x_0) rozszerzonej przestrzeni fazowej. Wówczas istnieje takie otoczenie punktu t_0 , w którym określone jest jednoznaczne rozwiązanie równania (1.5) przy zadanym warunku początkowym $\varphi(t_0) = x$, gdzie x jest dowolnym punktem dostatecznie bliskim x_0 ; rozwiązanie zależy przy tym od punktu początkowego x w sposób ciągły.

1.4. Całki pierwsze równań różniczkowych

Definicja 1.4.1. [2] Poziomicą funkcji $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ nazywa się pełny przeciwobraz punktu $C \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(C) \subset U$.

Niech U będzie obszarem w przestrzeni euklidesowej n -wymiarowej, x - punktem obszaru, $v \in \mathbb{R}^n$ - wektorem. Niech $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną, a $\varphi: I \rightarrow U$ będzie dowolną krzywą wychodzącą z punktu x z prędkością v , $\varphi(0) = x$, $\dot{\varphi}(0) = v$. Powstaje wówczas złożone odwzorowanie przedziału I osi rzeczywistej w oś rzeczywistą $f \circ \varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \circ \varphi)(t) = f(\varphi(t))$, tzn. funkcja rzeczywista zmiennej rzeczywistej t .

Definicja 1.4.2. [2] *Pochodną funkcji f w kierunku wektora v nazywamy liczbę $L_v f|_x = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f \circ \varphi)$.*

$$L_v f|_x = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f \circ \varphi) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_x v_i. \quad (1.6)$$

Ostatnia równość pokazuje, że pojęcie pochodnej funkcji f w kierunku wektora v nie zależy od wyboru krzywej φ wychodzącej z punktu x z prędkością v . Niech teraz $v = v_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + v_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}$ będzie polem wektorowym w obszarze U (por. Uwagę 1.2.3), a $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ - funkcją różniczkowalną. *Pochodną $L_v f$ funkcji f w kierunku pola wektorowego v naturalnie definiuje się jako*

$$L_v f = v_1(x)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + v_n(x)\frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Definicja 1.4.3. [2] Funkcję f nazywamy *całką pierwszą* równania

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in U,$$

jeśli jej pochodna w kierunku pola wektorowego v równa jest 0, tzn.:

$$L_v f|_x = 0 \quad \forall x \in U.$$

Twierdzenie 1.4.4. [2] *Następujące warunki są równoważne:*

1. $L_v f = 0$.
2. *Funkcja f jest stałą wzdłuż każdego rozwiązania $\varphi: I \rightarrow U$, tzn. każda funkcja $f \circ \varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie φ jest rozwiązaniem, jest stała.*
3. *Każda krzywa fazowa należy tylko do jednej i tylko jednej poziomici funkcji f .*

Nazwa *całka pierwsza* jest pozostałością historyczną. Wcześniej wszystkie równania różniczkowe próbowano rozwiązywać poprzez całkowanie. Wówczas obecnie rozumiane rozwiązanie określano mianem całki lub całki cząstkowej.

Przykład 1.4.5.

$$\ddot{x} = -k \sin x$$

Sprowadzenie do układu równań 1-go rzędu:

$$y = \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -k \sin x \end{cases}$$

Pole wektorowe: $v(x, y) = (y, -k \sin x) = y\frac{\partial}{\partial x} - k \sin x\frac{\partial}{\partial y}$. Funkcja $c(x, y) = -k \cos x + \frac{1}{2}y^2$ jest całką pierwszą, gdyż $L_v c = y(-k(-\sin x)) - k \sin x \frac{1}{2}2y = 0$.

1.5. II prawo mechaniki Newtona oraz układy potencjalne

Inne przykłady całek pierwszych pojawiają się w mechanice układów opartej na II prawie mechaniki Newtona

$$m\ddot{x}(t) = F(x(t), t).$$

Tutaj $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \in \mathbb{R}^3$ (lub ogólniej $\in \mathbb{R}^n$) jest położeniem punktu materialnego w momencie czasu t , m jego masą, a $F(x(t), t)$ siłą działającą na punkt w momencie t .

Niech dla funkcji wektorowej [14] $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ zapis $x^2(t)$ oznacza kwadrat długości wektora $x(t)$, t.j. $x^2(t) = (x(t)|x(t)) = x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t)$, gdzie $(\cdot|\cdot)$ oznacza iloczyn skalarny, zaś $|x(t)|$ oznacza jego długość:

$$|x(t)| = \sqrt{x^2(t)} = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t)}.$$

Definicja 1.5.1. [5] *Gradient* (lub *gradientowe pole wektorowe*) to operator różniczkowy, który działając na pole skalarne, tworzy pole wektorowe określone jako:

$$\text{grad } f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right]$$

lub inaczej

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \vec{k}$$

gdzie $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ są wersorami osi kartezjańskiego układu współrzędnych.

W fizyce gradientem energii potencjalnej jest siła, a potencjału (np. elektrycznego, grawitacyjnego) jest natężenie tego pola.

Definicja 1.5.2. *Potencjalnym* nazywamy układ, dla którego siła F ma postać $F(x) = -\text{grad } U(x)$, gdzie $U(x)$ jest pewną funkcją różniczkowalną zwaną *potencjałem* układu. Jego ruch opisany jest układem równań Newtona

$$m\ddot{x} = -\text{grad } U(x). \tag{1.7}$$

Energia kinetyczna T jest proporcjonalna do masy poruszającego się ciała:

$$T(\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2.$$

Całkowita energia mechaniczna układu potencjalnego wynosi

$$E(x, \dot{x}) = T(\dot{x}) + U(x).$$

Twierdzenie 1.5.3. [14] (*Prawo zachowania energii*) *Dla ruchu pod wpływem siły potencjalnej energia całkowita jest stała w trakcie ruchu.*

Dowód. Wystarczy wykazać, że jeżeli $t \mapsto \gamma(t)$ jest krzywą ruchu, tzn. jest rozwiązaniem równania

$$m\ddot{\gamma}(t) = (-\text{grad } U)(\gamma(t))$$

to

$$\frac{d}{dt}E(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = 0.$$

Istotnie,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m (\dot{\gamma}(t) | \dot{\gamma}(t)) + U(\gamma(t)) \right) = \\ & = \frac{1}{2} m \left(\ddot{\gamma}(t) | \dot{\gamma}(t) + (\dot{\gamma}(t) | \ddot{\gamma}(t)) \right) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_i}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}_i(t) = \\ & = (m \ddot{\gamma}(t) | \dot{\gamma}(t)) + (\text{grad } U(\gamma(t)) | \dot{\gamma}(t)) = (m \ddot{\gamma}(t) + \text{grad } U(\gamma(t)) | \dot{\gamma}(t)) = 0. \end{aligned}$$

Przedyskutujemy teraz niektóre skutki zaobserwowanej w Tw. 1.5.3 niezmienniczości energii całkowitej. Rozważmy ogólny układ potencjalny o jednym stopniu swobody (tzn. $x(t) \in \mathbb{R}$). Każde jego rozwiązanie jest związane wzajemnie jednoznacznie z warunkami początkowymi. Te z kolei wyznaczają wartość E_0 energii całkowitej w chwili początkowej. Warunek stałości energii mający postać $m\dot{x}^2/2 + U(x) = E_0$ prowadzi do równania

$$\dot{x}(t) = \pm \sqrt{\frac{2(E_0 - U(x))}{m}} \quad (1.8)$$

wyznaczającego możliwe ewolucje układu mechanicznego przy danym poziomie E_0 energii całkowitej. Równanie (1.8) jest pierwszego rzędu i na ogół łatwiej je rozwiązać niż oryginalny układ (1.7).

Okazuje się, że poza potencjalnością występujących sił, można podać wiele innych warunków „symetrii” implikujących pojawienie się innych niż energia całkowita funkcji zależnych od prędkości i położeń, które pozostają stałe w trakcie ruchu. Funkcje takie nazywa się *całkami pierwszymi ruchu*. Warunek ich stałości prowadzi, podobnie jak w przypadku energii całkowitej, do uproszczenia równań ruchu.

1.6. Podejście hamiltonowskie do mechaniki układu potencjalnego

Przykład 1.4.5 oraz późniejsza dyskusja mechaniki układów potencjalnych uzasadniają wprowadzenie następującej definicji.

Definicja 1.6.1. *Przestrzeń fazowa* [10] to $2n$ -wymiarowa przestrzeń współrzędnych uogólnionych $q = (q_1, \dots, q_n)$ i pędów uogólnionych $p = (p_1, \dots, p_n)$ układu mechanicznego o n stopniach swobody. Jej punkty są wyznaczone przez podanie wszystkich n współrzędnych uogólnionych i n pędów uogólnionych danego układu dynamicznego. Przestrzeń n -wymiarowa współrzędnych uogólnionych $q = (q_1, \dots, q_n)$ nazywa się *przestrzenią konfiguracyjną* układu.

Podejście hamiltonowskie [6] do mechaniki klasycznej jest dalece idącym uogólnieniem procedury sprowadzania jednego równania różniczkowego 2-go rzędu do dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu (por. Tw. 1.1.4). W podejściu hamiltonowskim funkcja energii jest rozumiana jako funkcja położenia i pędu (bardziej niż jako funkcja położenia i prędkości), czyli jest funkcją na przestrzeni fazowej, i jest określana jako hamiltonian. Obiekt poruszający się w \mathbb{R}^n pod wpływem siły potencjalnej jest określony zwykłą funkcją energii (będącą sumą energii kinetycznej i potencjalnej) następująco:

$$H(x, p) = \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^n p_j^2 + U(x), \quad \text{gdzie } p_j = m_j \dot{x}_j.$$

Prawo Newtona (1.7) może zostać zapisane w następującej formie:

$$\begin{cases} \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_j} \\ \frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad j = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (1.9)$$

Szczególnie przejrzystą postać ten układ równań przyjmuje, jeśli skorzystać z nawiasu Poissona, który jest jednym z niezbędnych narzędzi podejścia hamiltonowskiego i który będzie opisany w następnym podrozdziale.

1.7. Nawias Poissona i jego własności. Definicja hamiltonowskiego układu równań

Definicja 1.7.1. [6] Niech f i g będą funkcjami gładkimi na \mathbb{R}^{2n} , której elementami są pary (x, p) , gdzie $x \in \mathbb{R}^n$ oznacza położenie cząstki, zaś $p \in \mathbb{R}^n$ oznacza pęd cząstki. Wtedy *nawias Poissona* funkcji f i g (oznaczony $\{f, g\}$) stanowi funkcja na \mathbb{R}^{2n} określona następująco:

$$\{f, g\}(x, p) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial x_j} \right).$$

Stwierdzenie 1.7.2. [6] (*Własności nawiasu Poissona*)

Dla każdych funkcji gładkich f, g i h na \mathbb{R}^{2n} jest spełnione:

1. $\{f, g + ch\} = \{f, g\} + c\{f, h\}$ dla każdego $c \in \mathbb{R}$ (*liniowość*)
2. $\{g, f\} = -\{f, g\}$ (*antysymetryczność*)
3. $\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$ (*reguła Leibniza*)
4. $\{f, \{g, h\}\} = \{\{f, g\}, h\} + \{g, \{f, h\}\}$ (*tożsamość Jacobiego*)

Dowód. Własność 1.

$$\begin{aligned} \{f, g + ch\}(x, p) &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial (g + ch)}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial (g + ch)}{\partial x_j} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \left(\frac{\partial g}{\partial p_j} + c \frac{\partial h}{\partial p_j} \right) - \frac{\partial f}{\partial p_j} \left(\frac{\partial g}{\partial x_j} + c \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) \right) = \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} + c \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial x_j} - c \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) = \{f, g\} + c\{f, h\}. \end{aligned}$$

Własność 2.

$$\begin{aligned} \{f, g\}(x, p) &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial x_j} \right) = - \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} \right) = \\ &= - \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = -\{f, g\}. \end{aligned}$$

Własność 3.

$$\begin{aligned}
\{f, gh\}(x, p) &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial(gh)}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial(gh)}{\partial x_j} \right) = \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \left(\frac{\partial g}{\partial p_j} h + g \frac{\partial h}{\partial p_j} \right) - \frac{\partial f}{\partial p_j} \left(\frac{\partial g}{\partial x_j} h + g \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) \right) = \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} h - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial x_j} h + g \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial h}{\partial p_j} - g \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) = \{f, g\}h + g\{f, h\}.
\end{aligned}$$

Własność 4.

$$\begin{aligned}
\{\{f, g\}, h\} + \{g, \{f, h\}\}(x, p) &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial x_j} \right) \frac{\partial h}{\partial p_j} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial}{\partial p_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial x_j} \right) \frac{\partial h}{\partial x_j} + \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial p_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) \right) = \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} \frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial p_j} \right) \frac{\partial h}{\partial p_j} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial p_j} \frac{\partial g}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2} \right) \frac{\partial h}{\partial p_j} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial p_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial^2 g}{\partial p_j^2} \right) \frac{\partial h}{\partial x_j} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_j^2} \frac{\partial g}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial p_j} \right) \frac{\partial h}{\partial x_j} + \frac{\partial g}{\partial x_j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial p_j} \frac{\partial h}{\partial p_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j^2} \right) - \frac{\partial g}{\partial p_j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_j^2} \frac{\partial h}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial p_j} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial g}{\partial p_j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} \frac{\partial h}{\partial p_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial p_j} \right) + \frac{\partial g}{\partial p_j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial p_j} \frac{\partial h}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial^2 h}{\partial x_j^2} \right) \right) = \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial p_j} \frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2} \frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial^2 g}{\partial p_j^2} \frac{\partial h}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial p_j} \frac{\partial h}{\partial x_j} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j^2} - \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial p_j} + \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial^2 h}{\partial x_j^2} \right) = \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial p_j} \frac{\partial h}{\partial p_j} + \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial^2 h}{\partial p_j^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial p_j^2} \frac{\partial h}{\partial x_j} - \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial p_j} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial f}{\partial p_j} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2} \frac{\partial h}{\partial p_j} + \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial p_j} - \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial p_j} \frac{\partial h}{\partial x_j} - \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial^2 h}{\partial x_j^2} \right) \right) = \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial p_j} \left(\frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) \right) = \{f, \{g, h\}\}.
\end{aligned}$$

Definicja 1.7.4. Niech $f(x, p)$ będzie funkcją gładką na przestrzeni fazowej $M = \mathbb{R}^{2n}(x, p)$. *Hamiltonowskim polem wektorowym z hamiltonianem $f(x, p)$* nazywamy pole wektorowe na M zadane wzorem

$$X_f = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right).$$

Definicja 1.7.5. *Hamiltonowski układ równań różniczkowych* [12] to układ równań różniczkowych zadanych przez hamiltonowskie pole wektorowe X_f (por. Def. 1.2.4). We współrzędnych (x, p) stanowią układ $2n$ równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \frac{\partial f}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (1.10)$$

Zapisane w postaci nawiasu Poissona przyjmują postać:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \{x_i, f\} \\ \dot{p}_i = \{p_i, f\}. \end{cases}$$

Widzimy teraz, że prawo Newtona w postaci hamiltonowskiej (1.9) przyjmuje szczególnie prostą postać

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \{x_i, H\} \\ \dot{p}_i = \{p_i, H\}. \end{cases}$$

1.8. Całka pierwsza w ujęciu hamiltonowskim

Ponieważ dla pola hamiltonowskiego X_f i dowolnej funkcji gładkiej g na przestrzeni fazowej zachodzi równość $X_f g = \{f, g\}$ otrzymujemy następujące

Twierdzenie 1.8.1. [1] *Funkcja F jest całką pierwszą (por. Def. 1.4.3) układu hamiltonowskiego z funkcją Hamiltona H wtedy i tylko wtedy, gdy nawias Poissona H i F jest tożsamościowo równy zeru, czyli*

$$\{H, F\} \equiv 0.$$

Definicja 1.8.2. [1] Dwie funkcje F_1 i F_2 na przestrzeni fazowej są w *inwolucji*, jeśli ich nawias Poissona jest równy zeru, tj. $\{F_1, F_2\} = 0$.

Prawo zachowania energii (Tw. 1.5.3) otrzymuje teraz następujące proste sformułowanie i elementarny dowód.

Twierdzenie 1.8.3. (Prawo zachowania energii) *Funkcja $H: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ jest całką pierwszą układu równań hamiltonowskich (1.9).*

Dowód. Z zależności (1.6) wynika, że

$$L_{X_H} H = \{H, H\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) = 0.$$

Rozdział 2

Układy zupełnie całkowne i twierdzenie Arnoldda-Liouville'a

2.1. Ruch prawie okresowy na torusie

n -wymiarowy torus [7] stanowi produkt kartezjański okręgów S^1 wziętych n razy:

$$\mathbb{T}^n = S^1 \times S^1 \cdots \times S^1.$$

Ponieważ na S^1 możemy patrzeć jako na iloraz \mathbb{R}/\mathbb{Z} w sensie teorii grup oraz topologicznych przestrzeni ilorazowych, analogicznie możemy rozumieć \mathbb{T}^n jako

$$\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n.$$

Odwzorowanie $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n, P(\varphi) = \varphi \bmod 2\pi$ zadaje torus, gdzie $\varphi_i \pmod{2\pi}$ to zmienna kątowa i -tego okręgu. Funkcja mapowania P jest 2π -okresowa dla każdej zmiennej. Torus można przedstawić wówczas jako n -wymiarową kostkę $[0, 2\pi]^n \subset \mathbb{R}^n(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ (Rys. 2.1.2).

Definicja 2.1.1. [1] Niech \mathbb{T}^n będzie torusem n -wymiarowym, a $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \bmod 2\pi$ układem współrzędnych kątowych. Wówczas *ruchem prawie okresowym* nazywa się jednoparametrową grupę dyfeomorfizmów $\mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$, daną przez układ równań różniczkowych

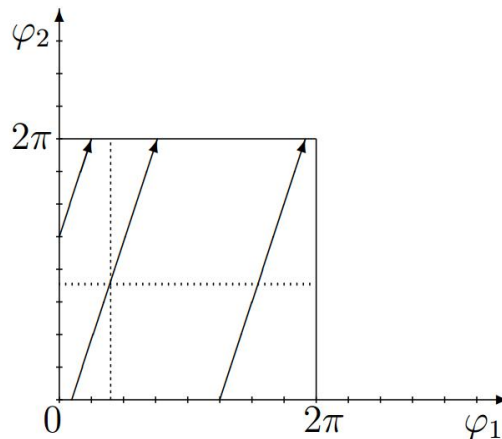
$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) = \text{const.} \quad (2.1)$$

Równania (2.1) po scałkowaniu zadają liniowy, prawie okresowy ruch na \mathbb{T}^n (Rys. 2.1.3), w mapie zmiennych-kąt $\{\varphi\}$ stanowią rzut trajektorii poprzez funkcję P :

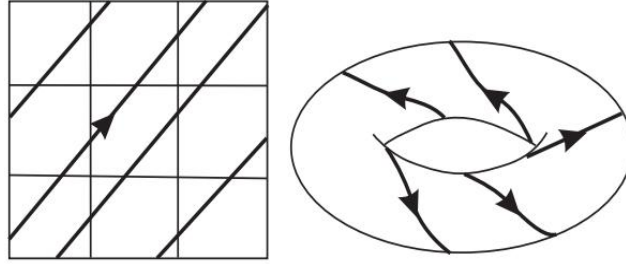
$$\varphi_i(t) = \varphi_i(0) + \omega_i t, \quad i = 1, \dots, n.$$

Trajektorię na torusie nazywa się *uzwojeniem torusa*. Stałe $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ nazywa się *częstościami ruchu prawie okresowego*.

Rysunek 2.1.2. Dynamika prawie okresowa na torusie.



Rysunek 2.1.3. [15] Dynamika prawie okresowa na torusie.



Dla zilustrowania rozważmy [8] na \mathbb{R}^2 pole wektorowe $v_{\omega_1, \omega_2} = \omega_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial x^2}$, gdzie $\omega_i \in]0, \infty[$, $i = 1, 2$ są stałe. Może ono zostać zrzutowane na pole wektorowe $\vec{v}_{\omega_1, \omega_2}$ na \mathbb{T}^2 . Jego trajektorie stanowią rzut $t \rightarrow P(x^1 + \omega_1 t, x^2 + \omega_2 t)$ linii $t \rightarrow (x^1 + \omega_1 t, x^2 + \omega_2 t)$. W przypadku, gdy $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ jest liczbą wymierną, $\omega_2 = m\lambda$, $\omega_1 = n\lambda$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{R}$. Wtedy dla $t := \frac{1}{\lambda}$ mamy $(x^1 + \omega_1 t, x^2 + \omega_2 t) = (x^1 + m, x^2 + n)$ oraz $P(x^1 + \omega_1 t, x^2 + \omega_2 t) = P(x^1, x^2)$, czyli trajektorie na torusie są zamknięte, wyznaczając ruch okresowy. W przeciwnym wypadku, t.j. gdy $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ jest liczbą niewymierną - trajektorie na torusie tworzą uzwojenie gęste.

2.2. Układy zupełnie całkowne

Definicja 2.2.1. [15] Układ hamiltonowski (por. Def. 1.7.5) na przestrzeni fazowej $M = \mathbb{R}^{2n}(q, p)$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

nazywa się *zupełnie całkownym*, jeśli istnieje układ funkcjonalnie niezależnych całek pierwszych $F_1 = H, F_2, \dots, F_n$ taki, że każda funkcja F_j jest całką pierwszą dla innych układów hamiltonowskich generowanych przez inne funkcje F_i , czyli funkcje F_j są parami w involucji (por. Def. 1.8.2).

Dla układów zupełnie całkownych zachodzi poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 2.2.2. [15] (*Twierdzenie Arnolda-Liouville'a o układach całkownych*)

Jeśli wspólne poziomice $\{F_1 = c_1, \dots, F_n = c_n\}$ zupełnie całkownego układu hamiltonowskiego są zwarte i gładkie, to są one torusami \mathbb{T}^n .

Ponadto, w otoczeniu danego takiego torusa istnieje układ współrzędnych $I_1, \dots, I_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n$, (tzw. zmienne działanie-kąt), w których układ hamiltonowski przyjmuje następującą postać hamiltonowską:

$$\dot{I}_j = 0, \quad \dot{\varphi}_j = \omega_j(I) = \frac{\partial H_0}{\partial I_j}, \quad i = 1, \dots, n,$$

gdzie $H(q, p) = H_0(I_1, \dots, I_n)$ jest hamiltonianem po zamianie. W szczególności ruch na torusach $I_1 = d_1, \dots, I_n = d_n$, które są parametryzowane przez kąty φ_j mod 2π jest okresowy lub prawie-okresowy:

$$\varphi_j(t) = \varphi_j(0) + \omega_j(I)t.$$

Wniosek 2.2.3. [1] Jeśli w układzie kanonicznym o dwóch stopniach swobody znana jest całka pierwsza F niezależna od funkcji Hamiltona H , to układ daje się scałkować przez kwadratury. Zwarta i spójna dwuwymiarowa podrozmaitość $H = h, F = f$ przestrzeni fazowej jest niezmienniczym torusem, na którym ruch jest prawie-okresowy.

Kwadratura [11] to historyczny termin oznaczający *określony obszar*. Wywodzi się ze starożytnych poszukiwań konstruowania kwadratu o polu równym danej figurze. Wykazano dopiero w XIX w., że np. tzw. kwadratura koła jest niemożliwa. Kwadratury stanowią jedno z zagadnień (problemów) rachunku różniczkowego i całkowego. Rozwiązywanie w kwadraturach oznacza to samo, co szukanie pola pod krzywą, czyli całki oznaczonej.

Geometryczna różnica między układami całkowalnymi a „chaotycznymi” [8] uwidoczni się w tym, że trajektorie ruchu w układach całkowalnych leżą na torusach o wymiarze niewiększym niż połowa wymiaru przestrzeni fazowej M , zaś w tych drugich gęsto zajmują przestrzeń M (zob. poniższy rysunek).

Rysunek 2.2.4. [1] Rozwarstwienie (foliacja) przestrzeni fazowej na niezmiennicze torusy.



Definicja 2.2.5. [1] Wymiar przestrzeni konfiguracyjnej nazywamy liczbą stopni swobody.

Przykład 2.2.6. Układ posiadający 1 stopień swobody jest całkowalnym układem hamiltonowskim ze względu na to, że funkcja H jest ze sobą w involucji. Całka pierwsza jest własnym Hamiltonianem.

Rozdział 3

Problem Keplera jako układ zupełnie całkowalny

Układy [3] takie jak keplerowski, w których ruch cząstek jest okresowy na torusach o wymiarach niewiększych niż połowa wymiaru przestrzeni fazowej, noszą nazwę zdegenerowanych lub „supercałkowalnych”. Warto zaznaczyć, że klasyczne układy często są zupełnie całkowalne. Przykładem tego jest punkt poruszający się w pole siły centralnej (nie koniecznie keplerowskim) w trójwymiarowej przestrzeni. Jej przestrzeń fazowa jest sześciowymiarowa, zaś energia i wektor momentu pędu są stałymi ruchu. Ich wspólne poziomice tworzą najczęściej dwuwymiarowe podrozmaitości, które jeśli spełniają warunek zwartości, są torusami, po których odbywa się ruch prawie okresowy o dwóch częstościach. Spośród wszystkich przypadków pola siły centralnej dodatkowe niezależne całki ruchu posiada układ Keplera oraz siły sprężystości. Te układy są zdegenerowane o ograniczonych kołowych orbitach ruchu.

Rozważmy płaski problem Keplera z punktu widzenia hamiltonowskich układów zupełnie całkowalnych. Wiadomo, że trójwymiarowy układ Keplera opisuje ruch cząstki (planety) o masie m wokół centrum przyciągania grawitacyjnego z potencjałem $k/|x|$. Nietrudno pokazać, że trajektorie układu zawierają się w płaszczyźnie ortogonalnej do wektora momentu pędu, czyli układ 3-wymiarowy redukuje się do układu 2-wymiarowego (płaskiego). Ostatni jest zadany przez wektorowe pole hamiltonowskie X_H w przestrzeni fazowej \mathbb{R}^4 o współrzędnych (x_1, x_2, p_1, p_2) (ze standardowym nawiasem Poissona, zob. Rozdział 1.7) z funkcją Hamiltona $H(x, p) = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{k}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$. Korzystając ze Definicji 1.7.4 otrzymujemy następujący wzór na X_H :

$$\begin{aligned} X_H = \{H, \cdot\} &= \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial H}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial p_1} - \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial p_2} - \frac{\partial H}{\partial p_2} \frac{\partial}{\partial x_2} = \\ &= -\frac{kx_1}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial p_1} - \frac{p_1}{m} \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{kx_2}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial p_2} - \frac{p_2}{m} \frac{\partial}{\partial x_2} = -k \frac{x_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial p_2}}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{p_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + p_2 \frac{\partial}{\partial x_2}}{m}. \end{aligned}$$

Przypomnijmy (Twierdzenie 1.4.3), że całka pierwsza $f(x, p)$ pola wektorowego X_H musi spełniać równanie cząstkowe

$$\begin{aligned} -k \frac{x_1 \left(\frac{\partial}{\partial p_1} f(x_1, x_2, p_1, p_2) \right) + x_2 \left(\frac{\partial}{\partial p_2} f(x_1, x_2, p_1, p_2) \right)}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}} + \\ - \frac{p_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, p_1, p_2) \right) + p_2 \left(\frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2, p_1, p_2) \right)}{m} = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja H (energia) sama spełnia równanie (3.1) (komutuje ze sobą w sensie nawiasu Poissona, por. Twierdzenie 1.8.3):

$$X_H H = \{H, H\} = 0.$$

Jedyna niezerowa składowa J wektora momentu pędu wyraża się wzorem

$$J := f(x_1, x_2, p_1, p_2) = x_1 p_2 - x_2 p_1 \quad (3.2)$$

Podstawiając za f (3.2) do (3.1) sprawdzamy, że J jest całką pierwszą

$$\begin{aligned} X_H J = \{H, J\} &= -k \frac{x_1 \frac{\partial}{\partial p_1}(x_1 p_2 - x_2 p_1) + x_2 \frac{\partial}{\partial p_2}(x_1 p_2 - x_2 p_1)}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}} + \\ &- \frac{p_1 \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 p_2 - x_2 p_1) + p_2 \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1 p_2 - x_2 p_1)}{m} = -k \frac{-x_1 x_2 + x_2 x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{p_1 p_2 - p_2 p_1}{m} = 0. \end{aligned}$$

Tzw. wektor Runge-Lenza ([6, Rozdz. 2.6]), posiada następujące niezerowe składowe A_1 i A_2 :

$$A_1 := f(x_1, x_2, p_1, p_2) = p_2 \frac{x_1 p_2 - x_2 p_1}{mk} + \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad (3.3)$$

$$A_2 := f(x_1, x_2, p_1, p_2) = -p_1 \frac{x_1 p_2 - x_2 p_1}{mk} + \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}. \quad (3.4)$$

Podobnie jak w przypadku momentu pędu J sprawdzamy, że one też są całkami pierwszymi:

$$X_H A_i = \{H, A_i\} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Ponieważ do tego, żeby układ o dwóch stopniach swobody był zupełnie całkowny potrzebujemy oprócz hamiltonianu H jeszcze tylko jednej całki pierwszej f niezależnej z H , pokazaliśmy, że problem Keplera można przedstawić na trzy różne sposoby jako układ zupełnie całkowny: (H, J) , (H, A_1) , (H, A_2) . Omawiany układ stanowi przykład tzw. układu „supercałkownego” dlatego, że udało nam się znaleźć dodatkowe całki pierwsze. W szczególności w rozważanym układzie trajektorie na torusach Liouville’a nie mogą być gęste, czyli ruch jest okresowy.

Mamy oczywistą relację

$$x_1 A_1(x, p) + x_2 A_2(x, p) = \frac{J^2(x, p)}{mk} + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Ustalmy poziomice funkcji $J(x, p) = j$, $A_1(x, p) = a_1$, $A_2(x, p) = a_2$. Wtedy mamy relację

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 = \frac{j^2}{mk} + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

która jest równoważna do

$$\left(a_1 x_1 + a_2 x_2 - \frac{j^2}{mk} \right)^2 = x_1^2 + x_2^2.$$

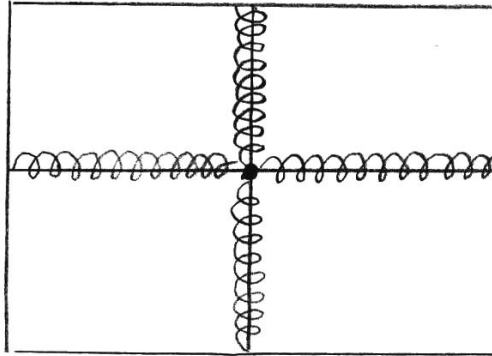
Ostatnia równość zadaje kwadrykę, po której odbywa się ruch w płaszczyźnie (x_1, x_2) . Po sprowadzeniu do postaci kanonicznej można zobaczyć, że ruch układu Keplera odbywa się po elipsach, parabolach lub hiperbolach w zależności od wartości parametrów (w ostatnich dwóch przypadkach poziomice wspólne funkcji Hamiltona oraz całki pierwszej nie są zwarte).

Rozdział 4

Dwuwymiarowy oscylator harmoniczny jako układ całkowny

Przykładem ruchu, którego opisujące równania zadają układ zupełnie całkowny, są oddziaływania sprężyste. Rozpatrzmy układ drgający w postaci dwuwymiarowego oscylatora harmonicznego. Punkt materialny poddany jest siłom sprężystym dwóch sprężyn po początkowym odchyleniu od położenia równowagi znajdującym się w środku układu i nadaniu początkowej prędkości.

Rysunek 4.1. [14] Dwuwymiarowy układ drgający.



Równanie na całkę pierwszą $X_H f = 0$, gdzie X_H jest polem hamiltonowskim oscylatora z funkcją Hamiltona $H(x, p) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + \omega_1^2 x_1^2 + \omega_2^2 x_2^2)$ (tutaj ω_1 i ω_2 są współczynnikami sprężystości sprężynek, zob. Przykłady 1.4 i 1.6 [14]), ma postać

$$\begin{aligned} -\omega_1^2 x_1 \frac{\partial}{\partial p_1} f(x_1, x_2, p_1, p_2) - \omega_2^2 x_2 \frac{\partial}{\partial p_2} f(x_1, x_2, p_1, p_2) + \\ + p_1 \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, p_1, p_2) + p_2 \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2, p_1, p_2) = 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja H (energia) sama spełnia równanie (4.1) (por. Twierdzenie 1.8.3):

$$X_H H = \{H, H\} = 0.$$

Niech

$$g := f(x_1, x_2, p_1, p_2) = \omega_1^2 x_1^2 - \omega_2^2 x_2^2 + p_1^2 - p_2^2.$$

Można łatwo wykazać, że funkcja gładka g jest całką pierwszą (patrz Podrozdz. 1.8):

$$\begin{aligned} X_H g = \{H, g\} = -\omega_1^2 x_1 \frac{\partial}{\partial p_1} (\omega_1^2 x_1^2 - \omega_2^2 x_2^2 + p_1^2 - p_2^2) - \omega_2^2 x_2 \frac{\partial}{\partial p_2} (\omega_1^2 x_1^2 - \omega_2^2 x_2^2 + p_1^2 - p_2^2) + \\ + p_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (\omega_1^2 x_1^2 - \omega_2^2 x_2^2 + p_1^2 - p_2^2) + p_2 \frac{\partial}{\partial x_2} (\omega_1^2 x_1^2 - \omega_2^2 x_2^2 + p_1^2 - p_2^2) = \end{aligned}$$

$$= -2\omega_1^2 x_1 p_1 + 2\omega_2^2 x_2 p_2 + 2p_1 \omega_1^2 x_1 - 2p_2 \omega_2^2 x_2 = 0.$$

Tym samym, ponieważ układ posiada 2 stopnie swobody, jest on zupełnie całkowny.

Żeby zbadać, czy ruch na torusach Liouville'a jest okresowy czy prawie okresowy, zauważmy, że układ dopuszcza jawne rozwiązanie

$$x_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1), \quad x_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2),$$

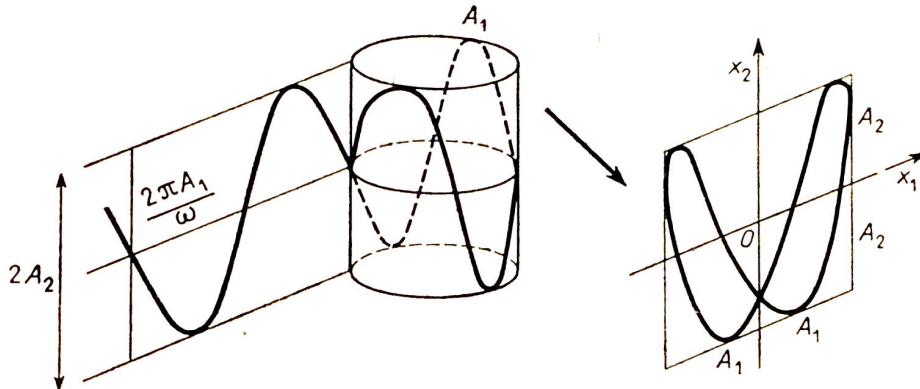
$$p_1(t) = A_1 \omega_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad p_2(t) = A_2 \omega_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Jego trajektorie leżą w poziomicach $H = \frac{A_1^2 \omega_1^2 + A_2^2 \omega_2^2}{2}$, $g = A_1^2 \omega_1^2 - A_2^2 \omega_2^2$.

Stałe $A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2$ wyznaczają warunki początkowe trajektorii. Dla uproszczenia połóżmy $\omega_1 = 1$. Wtedy trajektorie $x_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$, $x_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$ układu w płaszczyźnie (x_1, x_2) są tzw. *figurami Lissajou*.

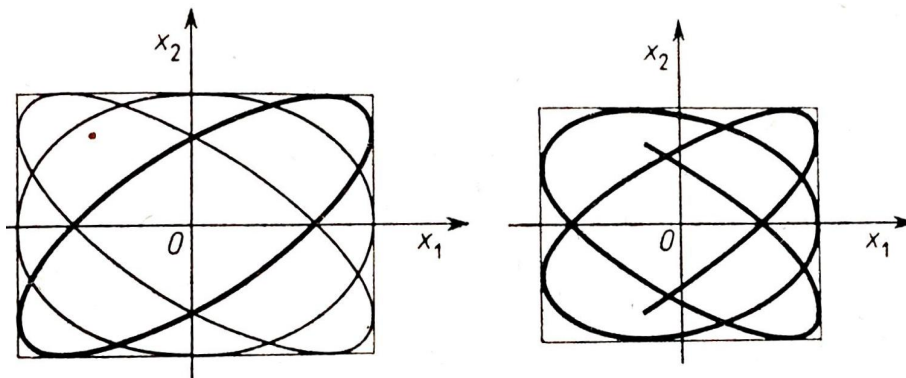
Punkt wykonuje niezależne drgania w płaszczyźnie pionowej i poziomej we współrzędnych x_1, x_2 . Płaski obraz trajektorii punktu drgającego stanowi rzut ortogonalny na płaszczyznę x_1, x_2 sinusoidy o okresie $2\pi A_1/\omega$ i amplitudzie A_2 zakreślonej przez punkt, której płaszczyzna zostaje zakrzywiona w formie walca (Rys. 4.2).

Rysunek 4.2. [1] Konstrukcja figury Lissajous.



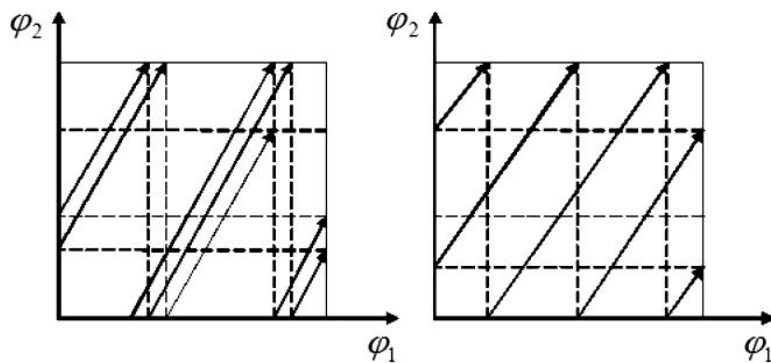
Figury Lissajou są krzywymi zamkniętymi w prostokącie $-A_1 < x_1 < A_1, -A_2 < x_2 < A_2$, gdy ω_2 jest wymierne oraz krzywymi gęsto wypełniającymi ten prostokąt w przeciwnym przypadku (Rys. 4.3).

Rysunek 4.3. [1] Figury Lissajou dla ω_2 wymiernego (z lewej) i niewymiernego (z prawej).



Odpowiednio przy niewymiernym ω_2 trajektorie pełnego układu będą gęsto wypełniać dwuwymiarowe torusy Liouville'a (ruch prawie okresowy), a przy wymiernym ω_2 będą zamknięte (ruch okresowy) (Rys. 4.4 odpowiednio):

Rysunek 4.4. [7] Liniowe trajektorie na dwuwymiarowym torusie dla niewymiernego i wymiernego stosunku częstości $\omega = \omega_2/\omega_1$ (odpowiednio):



Bibliografia

- [1] Arnold W.I., *Metody matematyczne mechaniki klasycznej*, PWN, Warszawa 1981.
- [2] Arnold W.I., *Równania różniczkowe zwyczajne*, PWN, Warszawa 1975.
- [3] Fasso F., *Notes on Finite Dimensional Integrable Hamiltonian Systems*, 1999, <http://www.math.unipd.it/~fasso/research/papers/sc.pdf>.
- [4] Gewert M., Skoczylas Z., *Równania różniczkowe zwyczajne. Teoria, przykłady, zadania*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2008.
- [5] *Gradient*, <https://en.wikipedia.org/wiki/Gradient>.
- [6] Hall B., *Quantum Theory for Mathematicians*, Springer Science+Business Media, New York 2013.
- [7] Jovanović B., *What are completely integrable Hamilton systems*, „The Teaching of Mathematic” 2011, t. XIII, z. 1, s. 1-14.
- [8] Panasyuk A., *Algebraic and geometric aspects of modern theory of integrable systems*, <http://wmii.uwm.edu.pl/~panas/school/monograf.pdf>.
- [9] Panasyuk A., *Introduction to Poisson and bihamiltonian geometry*, <http://wmii.uwm.edu.pl/~panas/school/school.pdf>.
- [10] *Przestrzeń fazowa*, <http://encyklopedia.pwn.pl/haslo/przestrzen-fazowa;3900145.html>.
- [11] *Quadrature*, [https://en.wikipedia.org/wiki/Quadrature_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Quadrature_(mathematics)).
- [12] *Równania Hamiltona*, https://pl.wikipedia.org/wiki/Równania_Hamiltona.
- [13] Sobczyk K., *Losowość, złożoność, prognozowalność: próby zrozumienia*, „Nauka” 2006, t. 2, s. 45-64.
- [14] Wojtyński W., *Matematyczne metody mechaniki*, Uniwersytet Warszawski 2011, mst.mimuw.edu.pl/wyklady/mmk/wyklad.pdf.
- [15] Żołądek H., *Jakościowa teoria równań różniczkowych zwyczajnych*, Uniwersytet Warszawski 2011, <http://mst.mimuw.edu.pl/lecture.php?lecture=rrj>.

Podziękowanie

Składam najserdeczniejsze podziękowania promotorowi dr. hab. Andriy Panasyukowi, prof. UWM, za nieocenioną pomoc w trakcie pisania niniejszej pracy.

Streszczenie

Praca poświęcona jest zupełnie całkowalnym układom hamiltonowskim zwyczajnych równań różniczkowych. W szczególności, podany jest zarys mechaniki hamiltonowskiej układów potencjalnych oraz omówione zostało twierdzenie Arnolda-Liouville'a o układach zupełnie całkowalnych. Szczegółowo rozważamy układ Keplera oraz dwuwymiarowy oscylator harmoniczny jako przykłady takich układów.

Słowa kluczowe: równania Hamiltona, hamiltonowskie pole wektorowe, Twierdzenie Arnolda-Liouville'a, teoria układów całkowalnych, kwadratury, „supercałkowalne” układy hamiltonowskie, nawias Poissona, involucja w sensie nawiasu Poissona, przestrzeń fazowa, układ Keplera, ruch prawie okresowy, niezmiennicze torusy, niezależne całki pierwsze ruchu, dwuwymiarowy oscylator harmoniczny.

Abstract

Completely Integrable Hamiltonian Systems

This work is devoted to completely integrable hamiltonian systems of ODE. In particular, we give an overview of hamiltonian mechanics of potential systems and discuss the Arnold-Liouville theorem on completely integrable systems. The Kepler problem and two-dimensional harmonic oscillator are considered in detail as examples of such systems.

Key words: Hamilton's equations, Hamiltonian vector field, the Arnold-Liouville theorem, theory of integrable systems, quadratures, „superintegrable” Hamiltonian systems, Poisson brackets, involution in the sense of Poisson brackets, the Kepler system, quasi-periodic motion, invariant tori, independent first integrals of motion, two-dimensional harmonic oscillator.