

# Teoria grup II

Andriy Panasyuk

## Spis treści

1	O algebrach Liego grup Liego raz jeszcze. Cz. I	2
2	O algebrach Liego grup Liego raz jeszcze. Cz. II	5
3	Związek pomiędzy podgrupami i podalgebrami Liego	7
4	Grupa automorfizmów algebry Liego	9
5	Zwarte i półproste algebry Liego. Cz. I	12
6	Zwarte i półproste algebry Liego. Cz. II	15
7	Rozwiązalne i nilpotentne algebry Liego. Twierdzenie Leviego.	18
8	Podalgebry Cartana i rozkład na podprzestrzenie pierwiastkowe. Cz. I	21
9	Podalgebry Cartana i rozkład na podprzestrzenie pierwiastkowe. Cz. II	24
10	Podalgebry Cartana i rozkład na podprzestrzenie pierwiastkowe. Cz. III	27
11	Istotność układu pierwiastków. Formy rzeczywiste zespolonych półprostych algebr Liego	30
12	Abstrakcyjne układy pierwiastków	33
13	O klasyfikacji półprostych algebr Liego	37
14	Elementy teorii reprezentacji półprostych algebr Liego	42

# 1 O algebrach Liego grup Liego raz jeszcze. Cz. I

*Literatura dodatkowa:* [Ada69, Tra, DK00]

**Grupa Liego:** Jest to grupa  $(G, \mu)$  taka, że  $G$  jest wyposażone w strukturę różniczkowej o tej własności, że działanie grupowe  $\mu : G \times G \rightarrow G$  oraz odwzorowanie  $\epsilon : g \mapsto g^{-1} : G \rightarrow G$  są gładkie.

PRZYKŁAD: Niech  $V$  będzie przestrzenią wektorową, a  $G := GL(V) \subset \text{End}(V)$  będzie grupą odwracalnych endomorfizmów przestrzeni  $V$ .

**Odwzorowania dołączone:** Oznaczmy  $\mathfrak{g} := T_e G$  (tutaj  $e \in G$  jest elementem neutralnym), a przez  $A_g : G \rightarrow G$  automorfizm wewnętrzny  $A_g(x) := gxg^{-1}, x, g \in G$ . Odwzorowanie  $A_g$  jest odwzorowaniem gładkim o własności  $A_g(e) = e$ . W szczególności, mamy odwzorowanie styczne  $(A_g)_*|_e : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , które standardowo oznacza się przez  $\text{Ad}_g$  (lub  $\text{Ad}_g$ , od angielskiego „adjoint”).

LEMAT *Odwzorowanie  $\text{Ad} : g \mapsto \text{Ad}_g : G \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$  jest reprezentacją  $G$  w przestrzeni wektorowej  $\mathfrak{g}$  (którą nazywamy reprezentacją dołączoną).*

*Dowód* Łatwo widzieć, że  $A_g$  jest odwzorowaniem odwracalnym (z odwrotnym  $A_{g^{-1}}$ ), więc  $\text{Ad}_g \in GL(\mathfrak{g})$ . Ponadto,  $A_{g_1 g_2} = A_{g_1} A_{g_2}$ , skąd  $\text{Ad}_{g_1 g_2} = \text{Ad}_{g_1} \text{Ad}_{g_2}$ , czyli  $\text{Ad}$  jest homomorfizmem.  $\square$

Zauważmy, że odwzorowanie  $\text{Ad}$  jest odwzorowaniem gładkim, w szczególności mamy odwzorowanie styczne  $\text{Ad}_*|_e : T_e G \rightarrow T_I GL(\mathfrak{g})$ . Wiemy, że  $T_I GL(\mathfrak{g}) = \text{End}(\mathfrak{g})$ , otrzymaliśmy więc odwzorowanie  $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g}), X \mapsto \text{ad}_X$  (standardowe oznaczenie  $\text{ad}_X$  lub  $\text{ad}X$ ).

Położmy

$$[X, Y] := \text{ad}_X Y, X, Y \in \mathfrak{g}.$$

PRZYKŁAD: Dla  $G = GL(V)$  mamy  $\mathfrak{g} = T_e G = \text{End}(V)$ , a odwzorowanie  $A_x : y \mapsto xyx^{-1} : G \rightarrow G$  jest ograniczeniem odwzorowania liniowego  $Y \mapsto xYx^{-1} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ . Stąd jego pochodna  $\text{Ad}_x$  z nim się pokrywa, czyli  $\text{Ad}_x Y = xYx^{-1}, Y \in \mathfrak{g}$ . Obliczymy różniczkę odwzorowania  $\text{Ad} : x \mapsto \text{Ad}_x : G \rightarrow \mathfrak{g}$  w  $e = I$  na wektorze  $X \in \mathfrak{g}$  w następujący sposób. Niech  $t \mapsto x(t)$  będzie gładką krzywą w  $G$  o własności  $x(0) = e, x'(0) = X$ . Wtedy

$$\text{ad}_X Y = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (x(t)Y(x(t))^{-1}) = x'(0)Y(x(0))^{-1} + x(0)Y((x(t))^{-1})' \Big|_{t=0} = XY - YX$$

(tutaj skorzystaliśmy z równości  $x(t)(x(t))^{-1} = I$  różniczkując którą w zerze, mamy  $((x(t))^{-1})' \Big|_{t=0} = -x'(0)$ ). Innymi słowy, nawias  $[X, Y]$  dla endomorfizmów przestrzeni liniowej jest ich komutatorem.

## Własności nawiasu $[\cdot, \cdot]$

**TWIERDZENIE** 1. Niech  $G$  będzie dowolną grupą Liego,  $\mathfrak{g} = T_e G$ . Wtedy para  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$  jest algebrą Liego, czyli nawias  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$

(a) jest dwuliniowy;

(b) jest antysymetryczny  $([X, Y] = -[Y, X] \forall X, Y \in \mathfrak{g})$ ;

(c) spełnia tożsamość Jakobiego  $([X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g})$ .

2. Niech  $G, G'$  będą grupami Liego, a  $\Phi : G \rightarrow G'$  będzie gładkim homomorfizmem. Oznaczmy  $\phi := \Phi_*|_e : T_e G \rightarrow T_e G'$ . Wtedy  $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$  jest homomorfizmem algebr Liego, czyli

$$\phi[X, Y]_{\mathfrak{g}} = [\phi(X), \phi(Y)]_{\mathfrak{g}'} \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

*Dowód* Zaczniemy dowód od drugiego punktu. Warunek homomorfizmu dla  $\Phi$  implikuje

$$\Phi(A_x y) = \Phi(x y x^{-1}) = \Phi(x) \Phi(y) \Phi(x)^{-1} = A_{\Phi(x)} \Phi(y).$$

Przy ustalonym  $x$  pierwszy i ostatni człon tego ciągu jest gładkim odwzorowaniem z  $G$  w  $G'$ . Obliczmy różniczkę tego odwzorowania w punkcie  $y = e$  na wektorze  $Y \in \mathfrak{g}$ , otrzymamy

$$\Phi_*|_{A_x e} \circ \text{Ad}_x Y = \phi(\text{Ad}_x Y) = \text{Ad}_{\Phi(x)} \circ \Phi_*|_e Y = \text{Ad}_{\Phi(x)} \phi(Y).$$

Pozwalając  $x$  się zmieniać, otrzymujemy gładkie odwzorowanie z  $G$  w  $\mathfrak{g}'$ . Obliczając jego różniczkę w  $e$  na wektorze  $X \in \mathfrak{g}$ , otrzymujemy

$$\phi(\text{ad}_X Y) = \text{ad}_{\phi(X)} \phi(Y).$$

Przystąpmy do dowodu p. 1. Dwuliniowość  $[\cdot, \cdot]$  jest oczywista. Teraz zastosujemy udowodniony fakt do homomorfizmu grup Liego  $\text{Ad} : G \rightarrow G' = GL(\mathfrak{g})$  oraz skorzystajmy z tego, że nawias  $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}'}$  pokrywa się z komutatorem. Otrzymamy równość

$$\text{ad}_{[X, Y]} = \text{ad}_X \text{ad}_Y - \text{ad}_Y \text{ad}_X.$$

która jest równoważna tożsamości Jakobiego w założeniu, że zachodzi antysymetryczność nawiasu (*Ćwiczenie: udowodnij tę równoważność*). Czyli zostało nam udowodnić antysymetryczność.

Rozważmy odwzorowanie  $\Psi : G \times G \rightarrow G, (x, y) \mapsto x y x^{-1} y^{-1}$ . Udowodnimy najpierw, że  $(e, e)$  jest punktem krytycznym tego odwzorowania, czyli różniczka  $\Psi_*|_{(e, e)}$  znika. Istotnie, mamy  $\Psi(x, e) = e, \Psi(e, y) = e$  dla dowolnych  $x, y \in G$ . Stąd różniczka cząstkowa  $\Psi_*^1|_{(e, e)}$  względem pierwszego argumentu znika i różniczka cząstkowa  $\Psi_*^2|_{(e, e)}$  względem drugiego argumentu też. Gładkość  $\Psi$  gwarantuje znikanie  $\Psi_*|_{(e, e)}$ .

Teraz obliczmy  $\Psi_*^2|_{(x, e)} Y$ , gdzie  $Y \in \mathfrak{g}$ , oraz  $\Psi_*^1|_{(e, y)} X$ , gdzie  $X \in \mathfrak{g}$ . Według lematu, który udowodnimy poniżej,  $\Psi_*^2|_{(x, e)} Y = \text{Ad}_x Y - Y$  oraz  $\Psi_*^1|_{(e, y)} X = X - \text{Ad}_y X$ . Obliczając różniczkę pierwszego wyrażenia po  $x$  na  $X$ , a drugiego po  $y$  na  $Y$ , otrzymujemy  $\text{ad}_X Y$  oraz  $-\text{ad}_Y X$  odpowiednio. Skądinąd wiemy, że te wyrażenia są równe, ponieważ gładkość odwzorowania gwarantuje symetryczność formy drugich pochodnych w punkcie krytycznym.  $\square$

LEMAT 1.  $\Psi_*^2|_{(x,e)}Y = \text{Ad}_xY - Y$ ;

2.  $\Psi_*^1|_{(e,y)}X = X - \text{Ad}_yX$ .

*Dowód* Najpierw zauważmy, że, jeśli  $\phi(t), \psi(t)$  są krzywe w  $G$  o własnościach  $\phi(0) = e = \psi(0), \phi'(0) = \Phi, \psi'(0) = \Psi$ , to  $\frac{d}{dt}|_{t=0}(\phi(t) \cdot \psi(t)) = \Phi + \Psi$ . Istotnie, działanie grupowe  $\mu : G \times G \rightarrow G$  spełnia tożsamości  $\mu(x, e) = x, \mu(e, y) = y$ , które implikują równości  $\frac{\partial \mu^k(e, e)}{\partial x^j} = \delta_j^k, \frac{\partial \mu^k(e, e)}{\partial y^j} = \delta_j^k$ . Tutaj wybraliśmy dowolny lokalny układ współrzędnych na  $G$  w otoczeniu  $e$  i reprezentujemy odwzorowanie  $\mu$  przez funkcje  $\mu^1, \mu^2, \dots$ . Teraz obliczamy:  $\frac{d}{dt}|_{t=0}(\phi(t) \cdot \psi(t)) = \frac{\partial \mu^k(e, e)}{\partial x^j} \Phi^j + \frac{\partial \mu^k(e, e)}{\partial y^j} \Psi^j = \Phi^k + \Psi^k$ .

Wybermy gładką krzywą  $y(t)$  w  $G$  o własnościach  $y(0) = e, y'(0) = Y$ . Wiemy już, że  $\frac{d}{dt}|_{t=0}(y(t))^{-1} = -Y$ . Ponadto, z definicji  $\frac{d}{dt}|_{t=0}(xy(t)x^{-1}) = \text{Ad}_xY$ .

Oznaczmy  $\phi(t) := xy(t)x^{-1}, \psi(t) := (y(t))^{-1}$ . Wtedy  $\phi(0) = e = \psi(0), \phi'(0) = \text{Ad}_xY, \psi'(0) = -Y$ . Ostatecznie,  $\Psi_*^2|_{(x,e)}Y = \frac{d}{dt}|_{t=0}(xy(t)x^{-1}(y(t))^{-1}) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\phi(t) \cdot \psi(t)) = \text{Ad}_xY - Y$ . Drugi wzór dowodzi się analogicznie.  $\square$

## 2 O algebrach Liego grup Liego raz jeszcze. Cz. II

*Literatura dodatkowa:* [Ada69, Tra, DK00]

**Przypomnienie o polach lewoniezmienicznych:** Dla  $g \in G$  określmy odwzorowanie lewej translacji  $L_g : G \rightarrow G$  wzorem  $L_g x := gx$  (i, przy okazji, prawej translacji  $R_g : G \rightarrow G$  wzorem  $R_g x := xg$ ). Mając element  $V \in T_e G = \mathfrak{g}$  możemy zbudować pole wektorowe  $V^l \in \text{Vect}(G)$  kładząc  $V^l = (L_g)_*|_e V$ . Tak określone pole wektorowe jest *lewoniezmienne*, czyli  $(L_g)_* V^l = V^l$ . I odwrotnie, każde pole lewoniezmienne  $v \in \text{Vect}(G)$  jest postaci  $v = V^l$ , gdzie  $V := w(e)$ .

### Potok pola lewoniezmienicznego

**LEMAT** *Niech  $\Phi^t := \Phi_w^t : G \rightarrow G$  będzie lokalnym potokiem pola lewoniezmienicznego  $w$  na  $G$ . (Inaczej mówiąc  $\frac{d}{dt}\Phi^t(x_0) = w(x_0)$  dla dowolnego  $x_0 \in G$ , czyli krzywa  $t \mapsto \Phi^t(x_0)$  zadaje lokalne rozwiązanie równania różniczkowego  $\dot{x} = w(x)$  z warunkiem początkowym  $x_0 \in G$ .) Wtedy ma miejsce wzór*

$$\Phi^t = R_{\Phi^t(e)}.$$

*Dowód:* Niech  $x(t) := R_{\Phi^t(e)}x_0$ . Wtedy  $x(t) = x_0\Phi^t(e) = L_{x_0}\Phi^t(e)$  oraz  $x(0) = x_0$ . Ponadto

$$\frac{d}{dt}x(t) = (L_{x_0})_*|_{\Phi^t(e)}w(\Phi^t(e)) = w(x_0\Phi^t(e)) = w(x(t)).$$

Stąd  $x(t) = \Phi^t(x_0)$ .  $\square$

**Jednoparametrowe podgrupy w  $G$ :** Są to homomorfizmy grup  $(\mathbb{R}, +) \rightarrow G$ .

**TWIERDZENIE** *Dla każdego  $X \in \mathfrak{g}$  istnieje jedyna jednoparametrowa podgrupa  $h_X : (\mathbb{R}, +) \rightarrow G$  gładka oraz spełniająca warunek  $\frac{d}{dt}|_{t=0}h_X(t) = X$ . Jest ona równa  $t \mapsto \Phi_{X^l}^t(e)$  (w szczególności krzywa całkowa pola  $X^l$  przechodząca przez  $e$  jest globalna w czasie).*

*Dowód:* Niech  $\Phi^t := \Phi_{X^l}^t$ . Znana z teorii równań różniczkowych jest własność  $\Phi^{t+s} = \Phi^t \circ \Phi^s$  (o ile prawa i lewa części są określone). Z lematu mamy  $\Phi^t \circ \Phi^s = R_{\Phi^t(e)} \circ R_{\Phi^s(e)} = R_{\Phi^s(e)\Phi^t(e)}$ , ale mamy też  $\Phi^{t+s} = R_{\Phi^{t+s}(e)}$ . Stąd  $\Phi^s(e) \cdot \Phi^t(e) = \Phi^{t+s}(e)$ .

Równość ta pokazuje, że, jeśli krzywa  $t \mapsto \Phi^t(e)$  jest określona dla  $t \in ]-\epsilon, \epsilon[$ , to jest ona określona również dla  $t \in ]-2\epsilon, 2\epsilon[$ . Iterując, dostajemy globalność po  $t$ .

**Jednoznaczność:** Niech  $h : (\mathbb{R}, +) \rightarrow G$  będzie podgrupą jednoparametrową o warunku  $\frac{d}{dt}|_{t=0}h(t) = X$ . Różniczkując równość

$$h(t+s) = h(t)h(s) = L_{h(t)}h(s)$$

po  $s$  w zerze mamy  $\dot{h}(t) = (L_{h(t)})_*|_e X = X^l(h(t))$ . Stąd  $h(t)$  jest krzywą całkową pola  $X^l$  przechodzącą przez  $e$ , czyli jest określona jednoznacznie.  $\square$

**Odwzorowanie wykładnicze  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ :** Dla  $X \in \mathfrak{g}$  definiujemy  $\exp(X)$  jako  $h_X(1)$ , gdzie  $h_X(t)$  jest (jedyną) grupą jednoparametrową o warunku  $h_X(0) = X$ .

**TWIERDZENIE**  *$\exp$  jest dyfeomorfizmem pewnego otoczenia  $U \ni 0$  w  $\mathfrak{g}$  na pewne otoczenie  $V \ni e$  w  $G$ .*

*Dowód:* Gładkość  $\exp$  wynika z teorii równań różniczkowych. Rozważmy  $h : s \mapsto h_X(st)$ . Wtedy  $h(s + s') = h_X((s + s')t) = h_X(st + s't) = h_X(st) \cdot h_X(s't) = h(s) \cdot h(s')$ , czyli  $h$  jest podgrupą jendoparametrową. Ponadto  $\dot{h}(0) = tX$ , skąd  $h(s) = h_{tX}(s)$ . Dla  $s = 1$  to daje

$$h_X(t) = \exp(tX).$$

Różniczkując tę równość w zerze, otrzymujemy  $X = \exp_*|_0 X$ , czyli  $\exp_*|_0 = \text{Id}_{\mathfrak{g}}$ . Stosując twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym, dostajemy wynik.  $\square$

**PZYKŁAD:** Niech  $G = U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} = 1\}$ . Wtedy jedynym (z dokładnością do proporcjonalności lewniezmienniczym polem na  $G$  jest  $v = w|_G$ , gdzie  $w$  jest polem wektorowym na płaszczyźnie zadany przez  $w := -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ . Istotnie, obrót o kat  $\phi$  jest zadany macierzą

$$L_\phi := \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}. \text{ Pochodna tego odwzorowania liniowego z nim się pokrywa i mamy}$$

$$L_\phi w((\cos \phi_0, \sin \phi_0)) = L_\phi \begin{bmatrix} -\sin \phi_0 \\ \cos \phi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\phi + \phi_0) \\ \cos(\phi + \phi_0) \end{bmatrix} = w((\cos(\phi + \phi_0), \sin(\phi + \phi_0))).$$

Odwzorowanie  $t \mapsto L_t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  (innymi słowy  $t \mapsto e^{it}$ ) jest jednoparametrową grupą  $h_X$ , odpowiadającą wektorowi  $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = w((1, 0)) \in \mathfrak{g} = T_e G$ . Odwzorowanie wykładnicze jest więc równe  $tX \mapsto h_{tX}(1) = h_X(t) = e^{it}$ .

**PRZYKŁAD:** Niech  $G = GL(n, \mathbb{R})$ . Pola lewniezmiennicze  $V^l, V \in \mathfrak{g} = \text{End}(\mathbb{R}^n)$ , mają postać  $(XV, X), X \in G$  (zob. ostatni wykład z Teorii grup I). Równanie różniczkowe  $\dot{X} = XV$  ma rozwiązanie  $t \mapsto X \text{Exp}(tV)$ , gdzie  $\text{Exp}$  jest funkcją wykładniczą od operatorów liniowych na  $\mathbb{R}^n$ . Rozwiązanie to zadaje jednoparametrową podgrupę odpowiadającą elementowi  $V \in \mathfrak{g}$ . Odwzorowanie wykładnicze  $\mathfrak{g} \rightarrow G$  ma postać  $V \mapsto \text{Exp}(V)$ .

### Inne własności odwzorowania $\exp$

**TWIERDZENIE** 1. *Jeśli  $G, H$  są grupami Liego o algebrach Liego  $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ , a  $\Phi : G \rightarrow H$  jest gładkim homomorfizmem, to*

$$\Phi(\exp X) = \exp((\Phi_*)|_e X) \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

$$2. \text{Ad}_{\exp X} = \text{Exp}(\text{ad}_X) \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

$$3. x \exp X x^{-1} = \exp(\text{Ad}_x X) \quad \forall X \in \mathfrak{g}, x \in G.$$

*Dowód:* *Ad. 1.* Niech  $X \in \mathfrak{g}$  i  $h_X : \mathbb{R} \rightarrow G$  będzie odpowiednią grupą jednoparametrową. Wtedy  $\exp(X) = h_X(1)$ , ale odwzorowanie  $h : t \mapsto \Phi(h_X(t)) : \mathbb{R} \rightarrow H$  (jako złożenie homomorfizmów gładkich) jest jednoparametrową podgrupą w  $H$ . Z drugiej strony  $\frac{d}{dt}|_{t=0} h(t) = (\Phi_*)|_e (\frac{d}{dt}|_{t=0} h_X) = (\Phi_*)|_e X$ , czyli  $h = h_{(\Phi_*)|_e X}$ .

*Ad. 2.* Zastosujmy p. 1 do gładkiego homomorfizmu grup Liego  $\text{Ad} : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ .

*Ad. 3.* Zastosujmy p. 1 do gładkiego homomorfizmu grup Liego  $A_x : G \rightarrow G$ .  $\square$

### 3 Związek pomiędzy podgrupami i podalgebrami Liego

*Literatura dodatkowa:* [Ada69, DK00, Hel00, Pos86]

**Podrozumności włożone i zanurzone:** Niech  $M$  będzie gładką rozmaitością. Podrozumnością (włożoną) kowymiaru  $k$  w  $M$  nazywamy podzbiór  $N \subset M$  taki, że dla każdego  $x \in N$  istnieje otoczenie otwarte  $U \ni x$  w  $M$  oraz odwzorowanie gładkie  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  o własnościach:

1. rząd odwzorowania  $f$  jest równy  $k$  w dowolnym punkcie  $y \in U \cap N$ ;
2.  $z \in U \cap N \iff \exists! c \in \mathbb{R}^k : f(z) = c$ .

Podrozumnością *zanurzoną* kowymiaru  $k$ , z kolei, nazywamy podzbiór  $N \subset M$  taki, że istnieje rozmaitość gładka  $N'$  wymiaru  $\dim M - k$  oraz odwzorowanie gładkie  $\Phi : N' \rightarrow M$  o własnościach:

1.  $\Phi$  jest injektywne;
2.  $\Phi$  jest immersja, czyli  $(\Phi_*)|_x : T_x N' \rightarrow T_{\Phi(x)} M$  jest injektywne dla dowolnego  $x \in N'$ ;
3.  $\Phi(N') = N$ .

*Ćwiczenie:* Udowodnić, że każda podrozumność jest podrozumnością zanurzoną.

**PRZYKŁAD („OWINIĘCIE TORUSA”):**  $M := \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ , pole wektorowe  $v_{a,b} := a\frac{\partial}{\partial x^1} + b\frac{\partial}{\partial x^2}$ , gdzie  $a, b \in ]0, \infty[$  są ustalone, może być zrzutowane na pole wektorowe  $\tilde{v}_{a,b}$  na  $\mathbb{T}^2$ . Trajektorie ostatniego  $t \rightarrow P(x^1 + at, x^2 + bt)$  są rzutami prostych  $t \rightarrow (x^1 + at, x^2 + bt)$ .

*Przypadek wymierny:*  $b/a$  wymierne,  $b = m\lambda, a = n\lambda$  dla pewnego  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Wtedy dla  $t := 1/\lambda$  mamy  $(x^1 + at, x^2 + bt) = (x^1 + m, x^2 + n)$  i  $P(x^1 + at, x^2 + bt) = P(x^1, x^2)$  (trajektorie są domknięte, czyli okresowe, i są podrozumnościami).

*Przypadek niewymierny:*  $b/a$  niewymierne (każda trajektoria jest podrozumnością zanurzoną gęstą w  $M$ , w szczególności nie jest podrozumnością).

**Podgrupa Liego  $H$  w grupie Liego  $G$ :** Jest to podgrupa  $H \subset M$  będąca podrozumnością.

*Ćwiczenie:* udowodnić, że podgrupa Liego ma naturalną strukturę grupy Liego oraz, że naturalne włożenie  $\iota : H \rightarrow G$  jest gładkim homomorfizmem.

**Wirtualna podgrupa Liego  $H$  w grupie Liego  $G$ :** Jest to podgrupa  $H \subset M$  będąca obrazem gładkiego monomorfizmu grup  $H' \rightarrow G$  dla pewnej grupy Liego  $H'$ . W szczególności: 1)  $H$  jest podrozumnością zanurzoną (*Ćwiczenie:* udowodnij); 2) oraz każda podgrupa Liego jest wirtualną podgrupą Liego; 3)  $H$  ma strukturę grupy Liego „przychodzącą” z  $H'$ .

**PRZYKŁAD:** Trajektoria pola  $\tilde{v}_{a,b}$  przechodząca przez 0 jest wirtualną podgrupą Liego i jest (prawdziwą) podgrupą Liego tylko w przypadku wymiernym.

*Uwaga:* Można pokazać, że wirtualna podgrupa Liego jest podgrupą Liego wtedy i tylko wtedy, gdy  $H$  jest domknięta w  $G$  (jako podprzestrzeń topologiczna), zob. [Ada69].

**Związek pomiędzy podgrupami i podalgebrami Liego:**

**TWIERDZENIE** 1. Niech  $H$  będzie wirtualną podgrupą Liego w  $G$ . Wtedy podprzestrzeń  $\mathfrak{h} := T_e H \subset T_e G = \mathfrak{g}$  jest podalgebrą Liego w algebrze Liego  $(\mathfrak{g}, [ , ])$  (innymi słowy  $[x, y] \in \mathfrak{h}$  dla wszystkich  $x, y \in \mathfrak{h}$ ). Ponadto  $(\mathfrak{h}, [ , ])|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}} = \text{Lie}(H)$  ( $\text{Lie}(F)$  oznacza algebrę Liego grupy Liego  $F$ ).

2. Odwrotnie, niech  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  będzie podalgebrą Liego w algebrze Liego  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$  grupy Liego  $G$ . Wtedy istnieje jedyna spójna wirtualna podgrupa Liego  $H \subset G$  o własności  $\mathfrak{h} = T_e H$ . Ponadto  $(\mathfrak{h}, [\cdot, \cdot]|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}) = \text{Lie}(H)$ .

*Dowód:* Ad. 1. Rozważmy monomorfizm  $\Phi : H' \rightarrow G$ ,  $\Phi(H') = H$ . Mamy odwzorowanie styczne  $\phi := (\Phi_*)_e : \mathfrak{h}' \rightarrow \mathfrak{g}$  (tutaj  $\mathfrak{h}' := \text{Lie}(H')$ ,  $\mathfrak{g} := \text{Lie}(G)$ ) będący homomorfizmem algebr Liego, zob. Wykład 1 (dokładniej,  $\phi$  jest monomorfizmem, czyli homomorfizmem z trywialnym jądrem). *Ćwiczenie:* pokaż, że obraz homomorfizmu  $\mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$  algebr Liego jest podalgebrą Liego w  $\mathfrak{g}_2$ . Oczywiście jest, że  $\text{im } \phi = \mathfrak{h}$ . To, że  $(\mathfrak{h}, [\cdot, \cdot]|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}) = \text{Lie}(H)$  wynika z definicji struktury grupy Liego na  $H$ : ona „przychodzi” z  $H'$ , skąd struktura algebry Liego na  $\mathfrak{h}$  „przychodzi” z  $\mathfrak{h}'$ .

DYGRESJA O TWIERDZENIU FROBENIUSA: *Dystrybucją* wymiaru  $r$  na rozmaitości gładkiej  $M$  nazywamy gładką podwiązkę  $D \subset TM$  wiązki stycznej  $TM$  z włóknem wymiaru  $r$ . Innymi słowy jest to rodzina podprzestrzeni  $D_x \subset T_x M$  gładko zależąca od punktu  $x \in M$ . Lokalnie taka dystrybucja jest generowana przez  $r$  liniowo niezależnych (w każdym punkcie) pól wektorowych.

Mówimy, że  $D$  jest *całkowalna*, jeśli przez każdy punkt  $x \in M$  przechodzi podrozmaitość zanurzona  $N_x$  o własności  $T_x N_x = D_x$  (takie  $N_x$  nazywamy *podrozmaitościami całkowymi* dla  $D$ ). Gładkość  $D$  gwarantuje jednoznaczność takiej podrozmaitości.

Mówimy, że  $\mathcal{D}$  jest *inwolutywna*, jeśli jeśli dla dowolnych dwóch pól wektorowych  $X, Y \in \text{Vect}(M)$  stycznych do  $D$  (czyli takich, że  $X(x), Y(x) \in D_x$  dla wszystkich  $x \in M$ ) ich komutator  $[X, Y]$  też jest styczny do  $D$  (równoważnie, lokalnie istnieją  $v_1, \dots, v_r, v_i \in \text{Vect}(M)$ , i funkcje  $f_{ij}^k$  takie, że  $\text{Span}\{v_1, \dots, v_r\} = \mathcal{D}$  and  $[v_i, v_j] = f_{ij}^k v_k$ ; *Ćwiczenie:* udowodnij równoważność).

PRZYKŁAD: Dystrybucja  $D$  generowana przez pole wektorowe  $\tilde{v}_{a,b}$  na  $\mathbb{T}^2$  (jak i każda dystrybucja 1-wymiarowa na dowolnej rozmaitości) jest inwolutywna i całkowalna. Podrozmaitości całkowite są trajektoriami pola  $\tilde{v}_{a,b}$ .

TWIERDZENIE (Frobeniusa) *Dystrybucja  $D$  jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest inwolutywna.*

PRZYKŁAD: Dystrybucja 2-wymiarowa generowana przez pola wektorowe  $X = \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial z}, Y = \frac{\partial}{\partial y}$  na  $\mathbb{R}^3$  nie jest inwolutywna, więc nie jest całkowalna.

Ad. 2. (*szkic dowodu*) Niech  $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{h} = T_e H$  będzie bazą przestrzeni liniowej  $\mathfrak{h}$ . Rozważmy pola lewniezmiennicze  $X_1^l, \dots, X_r^l$  oraz dystrybucję gładką  $D \subset TG$  rozpiętą przez nie. Ponieważ  $[X_i^l, X_j^l] = [X_i, X_j]^l$  (zob. ostatni wykład z Teorii grup I), dystrybucja  $D$  jest inwolutywna, więc i całkowalna. Niech  $H$  będzie podrozmaitością całkową dla  $D$  przechodzącą przez  $e$ .

Udowodnimy, że  $H$  jest podgrupą. Istotnie,  $D$  jest generowane przez lewniezmiennicze pola wektorowe, jest więc lewniezmiennicze:  $(L_g)_* D = D, g \in G$ . Stąd wnioskujemy, że i zbiór jego podrozmaitości całkowych jest lewniezmienniczy. Dokładniej mówiąc, jeśli  $H_x$  jest podrozmaitością całkową przechodzącą przez  $x \in G$ , to  $L_g H_x = H_{gx}$ . W szczególności dla  $g \in H = H_e$  mamy  $L_g H = L_g H_e = H_{ge} = H_g = H$ . Innymi słowy  $gh \in H$  dla dowolnych  $g, h \in H$ . Jeśli  $h \in H$ , to  $L_{h^{-1}} H = L_{h^{-1}} H_h = H_{h^{-1}h} = H_e = H$ . W szczególności,  $h^{-1}e \in H$ . Wraz z oczywistym warunkiem  $e \in H$  to daje żądaną własność  $H$ .

Do zakończenia dowodu należy wprowadzić na  $H$  strukturę gładką taką, że działania grupowe oraz włożenie  $\iota : H \hookrightarrow G$  są gładkie w niej (wtedy  $H'$  pokrywa się z  $H$  z tą strukturą, a monomorfizm  $H' \rightarrow G$  pokrywa się z  $\iota$ ). Ta część dowodu okazuje się nietrywialna z powodu subtelności topologicznych (zob. [Pos86]) i ją opuścimy.  $\square$



## 4 Grupa automorfizmów algebry Liego

*Literatura dodatkowa:* [Hel00]

### Kilka uwag wstępnych:

*Uwaga 1:* W pytaniu o jednoznaczności wirtualnej podgrupy Liego  $H$  odpowiadającej podalgebrze Liego  $\mathfrak{h}$  istotny jest wymóg spójności  $H$ . Na przykład, grupa Liego  $GL(n, \mathbb{R})$  ma dwie składowe spójne  $GL_{\pm}(n, \mathbb{R}) := \{X \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \pm \det X > 0\}$ . Składowa spójna jedynki,  $GL_+(n, \mathbb{R})$  ma tę samą algebrę Liego  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \text{Mat}(n, \mathbb{R})$ , co i  $GL(n, \mathbb{R})$ .

*Uwaga 2:* Spójna wirtualna podgrupa Liego  $H \subset G$  odpowiadająca podalgebrze Liego  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  może nie pokrywać się z  $\exp(\mathfrak{h})$  (zob. przykład poniżej) ale jest generowana przez  $\exp(\mathfrak{h})$ . Ostatnie oznacza, że elementy z  $H$  są postaci  $\exp Y_1 \cdots \exp Y_n$  dla pewnego  $n \in \mathbb{N}$  i pewnych  $Y_1, \dots, Y_n \in \mathfrak{h}$ . Wynika to z faktu, że każdy punkt  $y$  z podrozmierności całkowitej  $N_x$  dystrybucji  $D = \langle X_1^t, \dots, X_r^t \rangle$  jest postaci  $\Phi_{X_1^t}^{t_1} \circ \cdots \circ \Phi_{X_n^t}^{t_n} x$ , gdzie  $\Phi_{X_j^t}^{t_j}$  jest potokiem pola  $X_j^t$ .

*Uwaga 3:* Jeśli  $H \subset G$  jest wirtualną podgrupą Liego w grupie Liego  $G$  to odpowiednią podalgebrę Liego  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  można szukać używając wzoru  $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \exp_{\mathfrak{g}}(X) \in H\}$ , gdzie  $\exp_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \rightarrow G$  odwzorowanie wykładnicze odpowiadające większej grupie. *Ćwiczenie:* Udowodnij to.

PRZYKŁAD: Niech  $G := GL(n, \mathbb{R})$ ,  $H := SL(n, \mathbb{R}) = \{x \in G \mid \det x = 1\}$ . Wtedy  $\mathfrak{h} = \{X \in \text{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid \det \text{Exp}(X) = 1\}$ . Znana jest tożsamość  $\det \text{Exp}(X) = e^{\text{Tr}(X)}$  (zob. [Tra, I.7.1]), która implikuje  $\mathfrak{h} = \{X \in \text{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid \text{Tr}(X) = 0\} =: \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ .

PRZYKŁAD: Niech  $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ . Wtedy  $\det(X - \lambda I) = -(a^2 - \lambda^2) - bc$  i  $\lambda$  jest wartością własną wtedy i tylko wtedy gdy  $\lambda^2 = a^2 + bc = -\det(X) =: D$ . Postać Jordana macierzy  $X$  i  $\text{Exp}(X)$  jest równa odpowiednio

1.  $\begin{bmatrix} \sqrt{D} & 0 \\ 0 & -\sqrt{D} \end{bmatrix}$  i  $\begin{bmatrix} e^{\sqrt{D}} & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{D}} \end{bmatrix}$ , jeśli  $D > 0$ ;
2.  $\begin{bmatrix} i\sqrt{-D} & 0 \\ 0 & -i\sqrt{-D} \end{bmatrix}$  i  $\begin{bmatrix} e^{i\sqrt{-D}} & 0 \\ 0 & e^{-i\sqrt{-D}} \end{bmatrix}$ , jeśli  $D < 0$ ;
3.  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  i  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , jeśli  $D = 0$ .

(*Ćwiczenie:* Znajdź jawną postać  $\text{Exp}(X)$  w każdym przypadku.) Wynika z tego, że macierz  $x = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$  nie leży w  $\text{Exp}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$  dla  $\alpha < 0, \alpha \neq -1$  ( $x$  pokrywa się ze swoją postacią Jordana).

*Uwaga 4:* (zob. [Hel00, II, §5]) Jeśli  $G$  jest grupą Liego, a  $H \subset G$  jej *normalną* podgrupą Liego (prawdziwą), to grupa ilorazowa  $G/H$  posiada naturalną strukturę grupy Liego, względem której rzut kanoniczny  $\pi : G \rightarrow G/H$  jest gładkim homomorfizmem grup.

*Uwaga 5:* (zob. [Hel00, II, §5]) Jeśli  $\Phi : G \rightarrow F$  jest homomorfizmem gładkim grup Liego, to

1. jądro  $H := \ker \Phi = \Phi^{-1}(e)$  jest normalną (prawdziwą) podgrupą Liego w  $G$ ;
2. istnieje jedyny gładki homomorfizm grup Liego  $\Phi' : G/H \rightarrow F$  zamykający diagram

$$\begin{array}{ccc} G & & \\ \downarrow \pi & \searrow \Phi & \\ G/H & \xrightarrow{\Phi'} & F \end{array}$$

3. obraz  $\Phi(G)$  jest wirtualną podgrupą Liego w  $F$ , przy czym odwzorowanie  $\Phi'$  zadaje izomorfizm struktur grup Liego na  $G/H$  i  $\Phi(G)$ .

**Automorfizmy algebry Liego  $\mathfrak{g}$ :** Są to endomorfizmy odwracalne  $N \in GL(\mathfrak{g})$  przestrzeni liniowej  $\mathfrak{g}$  będące jednocześnie homomorfizmami algebry Liego  $(\mathfrak{g}, [,])$ . (*Ćwiczenie:* Sprawdź, że odwrotność takiego homomorfizmu automatycznie jest homomorfizmem.) Automorfizmy algebry Liego tworzą podgrupę  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$  w grupie Liego  $GL(\mathfrak{g})$ .

*Ćwiczenie:* Udowodnij, że  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$  jest podgrupą Liego w  $GL(\mathfrak{g})$ . *Wskazówka:* Wykaż, że  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$  jest liniową grupą algebraiczną (zob. Wykład 12 z Teorii grup I).

**Algebra Liego  $\partial(\mathfrak{g})$  grupy  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ :** Wiemy (zob. Uwagę 3), że  $\partial(\mathfrak{g})$  składa się z takich  $D \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) := \text{End}(\mathfrak{g})$ , że  $\text{Exp}(tD) \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$  dla dowolnego  $t \in \mathbb{R}$ , czyli

$$\text{Exp}(tD)[X, Y] = [\text{Exp}(tD)X, \text{Exp}(tD)Y], \quad X, Y \in \mathfrak{g}. \quad (1)$$

Różniczkując tę równość po  $t$  w zerze otrzymujemy

$$D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY], \quad X, Y \in \mathfrak{g} \quad (2)$$

(istotnie,  $\text{Exp}(tD)[X, Y] = (I + tD + \dots)[X, Y] = [X, Y] + tD[X, Y] + \dots$ ,  $[\text{Exp}(tD)X, \text{Exp}(tD)Y] = [(I + tD + \dots)X, (I + tD + \dots)Y] = [X, Y] + t([DX, Y] + [X, DY]) + \dots$ , tutaj  $\dots$  oznacza czony rzędu wyższego niż 1 po  $t$ ). Powyższy wzór oznacza, że  $D$  jest *różniczkowaniem* algebry Liego  $(\mathfrak{g}, [,])$  (zob. ostatni wykład z Teorii grup I).

**LEMAT** *Algebra Liego  $\partial(\mathfrak{g})$  grupy Liego  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$  składa się ze wszystkich różniczkowań algebry Liego  $(\mathfrak{g}, [,])$ .*

*Dowód:* Niech  $D$  będzie różniczkowaniem. Stosując indukcję otrzymujemy ze wzoru (2) wzór na „wyższe różniczkowania”:  $D^k[X, Y] = \sum_{i+j=k} \frac{k!}{i!j!} [D^i X, D^j Y]$ , gdzie  $D^0 := \text{Id}$ . Stąd dla  $D$  otrzymujemy wzór (1), czyli  $\text{Exp}(tD) \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$ .  $\square$

**Grupa dołączona i różniczkowania wewnętrzne:** Tożsamość Jakobiego implikuje dwa ważne fakty: 1) dla dowolnego  $X \in \mathfrak{g}$  operator  $\text{ad}_X \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  jest różniczkowaniem (zwanym *wewnętrznym*); 2) odwzorowanie  $X \mapsto \text{ad}_X : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  jest homomorfizmem algebr Liego. (*Ćwiczenie:* Udowodnij to po raz kolejny). Obraz tego homomorfizmu oznaczamy  $\text{ad}(\mathfrak{g})$ . Jest on podalgebrą w  $\partial(\mathfrak{g})$  (jako obraz homomorfizmu).

Teraz opiszemy grupę Liego odpowiadającą tej algebrze Liego.

**LEMAT** *Niech  $G$  będzie grupą Liego. Wtedy dla każdego  $x \in G$  endomorfizm odwracalny  $\text{Ad}_x \in GL(\mathfrak{g})$  jest automorfizmem algebry Liego  $\mathfrak{g}$*

*Dowód:* Przypomnijmy, że odwzorowanie  $\text{Ad}_x : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  było zdefiniowane jako pochodna w jedyńce  $(A_x)_*|_e$  automorfizmu wewnętrznego  $A_x, A_x y := xyx^{-1}$ , grupy  $G$ . Pochodna w jedyńce homomorfizmu grup Liego jest homomorfizmem odpowiednich algebr Liego (zob. Wykład 1), stąd  $\text{Ad}_x$  jest homomorfizmem algebry Liego  $\mathfrak{g}$ . Jest to homomorfizm odwracalny ( $(\text{Ad}_x)^{-1} = \text{Ad}_{x^{-1}}$ ), czyli jest automorfizmem  $\mathfrak{g}$ .  $\square$

Z lematu tego wynika, że obraz gładkiego homomorfizmu grup Liego  $\text{Ad} : G \rightarrow GL(\mathfrak{g}), x \mapsto \text{Ad}_x$ , leży w podgrupie Liego  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ . Wirtualną podgrupę Liego  $\text{Ad}(G) \subset \text{Aut}(\mathfrak{g})$  oznaczamy przez  $\text{Int}(\mathfrak{g})$  i nazywamy grupą *dołączoną* lub grupą *automorfizmów wewnętrznych*. Ponieważ odwzorowanie  $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$  było definiowane jako pochodna  $\text{Ad}$  w jedyńce,  $\text{Lie}(\text{Int}(\mathfrak{g})) = \text{im ad} = \text{ad}(\mathfrak{g})$ .

LEMAT *Niech  $G$  będzie spójną grupą Liego, a  $Z = \{x \in G \mid x \cdot y = y \cdot x \ \forall y \in G\} \subset G$  będzie jej centrum. Wtedy jądro homomorfizmu grup  $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$  pokrywa się z  $Z$ . W szczególności,  $\text{Int}(\mathfrak{g})$  jest izomorficzna jako grupa Liego z  $G/Z$ .*

*Dowód.* Jeśli  $x \in Z$ , to  $A_x = \text{Id}_G$  i jego pochodna  $\text{Ad}_x$  też jest identycznością, czyli  $x \in \ker \text{Ad}$ .

Odwrotnie, niech  $x \in \ker \text{Ad}$ . Wzór  $x \exp X x^{-1} = \exp(\text{Ad}_x X)$  (zob. Wykład II) implikuje, że jeśli  $x \in Z$ , to  $x$  komutuje ze wszystkimi elementami postaci  $\exp X, X \in \mathfrak{g}$ . Ponieważ takie elementy generują  $G$  (zob. Uwagę 2),  $x \in Z$ .  $\square$

## 5 Zwarte i półproste algebry Liego. Cz. I

*Literatura dodatkowa:* [Hel00]

**Suma prosta (zewnętrzna) algebr Liego**  $(\mathfrak{g}_1, [, ]_1)$  i  $(\mathfrak{g}_2, [, ]_2)$ : Jest to algebra Liego  $(\mathfrak{g}, [, ])$ , gdzie  $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ ,  $[(X_1, X_2), (Y_1, Y_2)] := ([X_1, Y_1], [X_2, Y_2])$ . *Ćwiczenie:* sprawdź, że to jest algebra Liego.

**Ideał  $\mathfrak{a}$  w algebrze Liego  $\mathfrak{g}$ :** Jest to podprzestrzeń wektorowa w  $\mathfrak{g}$  o własności  $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}$ , gdzie  $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] := \{[A, X] \mid A \in \mathfrak{a}, X \in \mathfrak{g}\}$  (zauważmy, że każdy ideał jest podalgebrą). W szczególności, 1) *centrum*  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) := \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0 \forall Y \in \mathfrak{g}\}$  algebry Liego  $\mathfrak{g}$  jest ideałem w  $\mathfrak{g}$ ; 2) *komutant*  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] := \{[X, Y] \mid X, Y \in \mathfrak{g}\}$  algebry Liego  $\mathfrak{g}$  jest ideałem w  $\mathfrak{g}$ ; 3) jeśli  $(\mathfrak{g}, [, ])$  jest sumą prostą, to  $(\mathfrak{g}_1, 0), (0, \mathfrak{g}_2)$  są ideałami w  $\mathfrak{g}$ . *Ćwiczenie:* sprawdź to.

**Wewnętrzna suma prosta:** Niech  $\mathfrak{g}$  ma ideały  $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$  takie, że  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$  (wewnętrzna suma prosta przestrzeni wektorowych, czyli  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2 = \{0\}$ ). Wtedy  $\mathfrak{g}$  jest izomorficzna jako algebra Liego z zewnętrzną sumą prostą  $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ . *Ćwiczenie:* sprawdź to.

**PRZYKŁAD:** Niech  $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ . Wtedy  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathbb{R}I$ ,  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  oraz  $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ . *Ćwiczenie:* sprawdź to.

**PRZYKŁAD:** Niech  $\mathfrak{g} := \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ . Wtedy  $\mathfrak{g}$  ze zwykłym komutatorem macierzy

jest algebrą Liego (zwaną *algebrą Heisenberga*). Komutator przekłada się na następujące działanie:  $[(a, b, c), (a', b', c')] = (0, ac' - a'c, 0)$ . W szczególności,  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{(0, b, 0) \mid b \in \mathbb{R}\}$ , ale nie istnieje takiego ideału (nawet podalgebry)  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ , że  $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{a}$  (tutaj rozumiemy ostatecznie wyrażenie jako sumę prostą algebr Liego). *Ćwiczenie:* sprawdź to.

**PRZYKŁAD:** Niech  $\mathfrak{g} := \mathfrak{b}(n, \mathbb{R}) := \{[X_{ij}] \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid X_{ij} = 0 \forall i > j\}$  (algebra Liego macierzy *górnotrójkątnych*). Wtedy  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{n}(n, \mathbb{R}) := \{[X_{ij}] \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid X_{ij} = 0 \forall i \geq j\}$  (algebra Liego macierzy *ściśle górnotrójkątnych*, dla  $n = 3$  pokrywa się z algebrą Heisenberga). *Ćwiczenie:* sprawdź to.

### Związek pomiędzy ideałami a podgrupami normalnymi:

**LEMAT** *Niech  $G$  będzie grupą Liego,  $H \subset G$  jej wirtualna podgrupą Liego i niech  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G), \mathfrak{h} = \text{Lie}(H)$ . Wtedy  $H$  jest podgrupą normalna, jeśli i tylko jeśli  $\mathfrak{h}$  jest ideałem w  $\mathfrak{g}$ .*

*Dowód:* Niech  $H$  normalna, czyli odwzorowanie  $A_x : G \rightarrow G, A_x y = xyx^{-1}, x \in G$ , zachowuje  $H$ :  $A_x(H) \subset H$ . Wtedy jego pochodna  $\text{Ad}_x : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  zachowuje  $T_e H = \mathfrak{h}$ , czyli  $\text{Ad}_x(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$ . Innymi słowy, obraz homomorfizmu grup Liego  $\text{Ad} : G \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$  leży w podgrupie  $\text{End}^{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g})$  endomorfizmów  $\mathfrak{g}$  zachowujących  $\mathfrak{h}$ . Wybierzmy bazę  $e_1, \dots, e_n$  w  $\mathfrak{g}$  taką, że  $e_1, \dots, e_k$  jest baza  $\mathfrak{h}$ . Endomorfizmy z  $\text{End}^{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g})$  w tej bazie mają macierze postaci blokowej  $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$ .

Niech  $c(t)$  będzie krzywą gładką w  $G$  o warunku  $c(0) = e, \dot{c}(0) = X, X \in \mathfrak{g}$ . Odwzorowanie  $\text{Ad}$  przeprowadza tę krzywą na krzywą postaci  $\begin{bmatrix} A(t) & B(t) \\ 0 & C(t) \end{bmatrix}$ , a jego pochodna  $\text{ad}$  przeprowadza wektor

$X$  na  $\begin{bmatrix} \dot{A}(0) & \dot{B}(0) \\ 0 & \dot{C}(0) \end{bmatrix}$ . Stąd widzimy, że  $\text{ad}_X$  też zachowuje  $\mathfrak{h}$ , a ponieważ  $X \in \mathfrak{g}$  jest dowolne,  $\mathfrak{h}$  jest ideałem.

Odwrotnie, niech  $\mathfrak{h}$  będzie ideałem. Wtedy  $\text{ad}_X Y \in \mathfrak{h}$  dla dowolnego  $X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{h}$ . Stąd też  $\text{Exp}(\text{ad}_X)Y \in \mathfrak{h}$ , a wzór  $\text{Exp}(\text{ad}_X) = \text{Ad}_{\text{exp } X}$  (zob. Wykład 2) pokazuje, że i  $\text{Ad}_{\text{exp } X} Y \in \mathfrak{h}$ . Ponieważ  $\text{exp}(\mathfrak{g})$  generuje  $G$ , mamy  $\text{Ad}_x Y \in \mathfrak{h}$  dla dowolnego  $x \in G$  (istotnie, jeśli  $x = \text{exp } X_1 \cdots \text{exp } X_s$ , to  $\text{Ad}_x = \text{Ad}_{\text{exp } X_1} \circ \cdots \circ \text{Ad}_{\text{exp } X_s}$  wskutek tego, że  $\text{Ad}$  jest reprezentacją). Teraz zostaje skorzystać ze wzoru  $\text{exp}(\text{Ad}_x Y) = x \text{exp } Y x^{-1}$  (zob. Wykład 2) oraz z faktu, że  $\text{exp}(\mathfrak{h})$  generuje  $H$ , żeby wywnioskować, że  $x H x^{-1} \subset H$ .  $\square$

**Forma Killinga na algebrze Liego  $\mathfrak{g}$ :** Niech  $\mathfrak{g}$  będzie algebrą Liego nad ciałem  $\mathbb{K}(= \mathbb{R}, \mathbb{C})$ . Niech  $(|)$  będzie dwuliniową formą symetryczną na  $\mathfrak{g}$ . Nazywamy  $(|)$  *niezmienniczą*, jeśli ma własność:

$$([X, Y]|Z) + (Y|[X, Z]) = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$$

(innymi słowy operator  $\text{ad}_X$  jest w niej skośnie symetryczny dla dowolnego  $X \in \mathfrak{g}$ ).

**PRZYKŁAD:** Forma  $(X|Y) := \text{Tr}(XY)$  na  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}), \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  jest niezmiennicza:  $([X, Y]|Z) = \text{Tr}([X, Y]Z) = \text{Tr}((XY - YX)Z) = \text{Tr}(XYZ - YXZ) = \text{Tr}(YZX - YXZ)$  oraz  $(Y|[X, Z]) = \text{Tr}(Y[X, Z]) = \text{Tr}(YXZ - YZX) = -([X, Y]|Z)$ .

**PRZYKŁAD:** *Forma Killinga*  $B_{\mathfrak{g}}(X, Y) := \text{Tr}(\text{ad}_X \text{ad}_Y)$  jest niezmiennicza dla dowolnej algebry Liego  $\mathfrak{g}$ :  $B_{\mathfrak{g}}([X, Y], Z) = \text{Tr}(\text{ad}_{[X, Y]} \text{ad}_Z) = \text{Tr}([\text{ad}_X, \text{ad}_Y] \text{ad}_Z) = -\text{Tr}(\text{ad}_Y [\text{ad}_X, \text{ad}_Z]) = -\text{Tr}(\text{ad}_Y \text{ad}_{[X, Z]}) = -B_{\mathfrak{g}}(Y, [X, Z])$ .

**LEMAT** Niech  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$  będzie ideałem, a  $(|)$  niezmienniczą formą symetryczną na  $\mathfrak{g}$ . Wtedy dopełnienie ortogonalne  $\mathfrak{a}^{\perp} := \{X \in \mathfrak{g} \mid (X|Y) = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{a}\}$  też jest ideałem.

*Dowód:* Niech  $X \in \mathfrak{a}, Y \in \mathfrak{g}, Z \in \mathfrak{a}^{\perp}$ . Wtedy  $[X, Y] \in \mathfrak{a}$ , skąd  $0 = ([X, Y]|Z) = -(Y|[X, Z])$ , co oznacza, że  $[X, Y] \in \mathfrak{a}^{\perp}$ .  $\square$

**Półprosta algebra Liego:** Jest to algebra Liego z *niezdegenerowaną* formą Killinga  $B_{\mathfrak{g}}$ .

*Uwaga:* Półprosta algebra Liego ma trywialne centrum. Istotnie, centrum  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$  jest jądrem odwzorowania  $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$ . W szczególności,  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$  leży w jądrze formy Killinga, które jest trywialne.

**LEMAT** Niech  $\mathfrak{g}$  będzie półprostą algebrą Liego, a  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$  jej ideałem. Wtedy

1. Ograniczenie  $B_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}}$  formy Killinga algebry  $\mathfrak{g}$  do  $\mathfrak{a}$  pokrywa się z  $B_{\mathfrak{a}}$ .
2.  $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^{\perp}$ .
3.  $\mathfrak{a}$  (i  $\mathfrak{a}^{\perp}$ ) jest algebrą półprostą.

*Dowód:* *Ad. 1.* Znowu wybierzmy bazę  $e_1, \dots, e_n$  w  $\mathfrak{g}$  taką, że  $e_1, \dots, e_k$  jest baza  $\mathfrak{a}$ . Endomorfizmy  $\text{ad}_X^{\mathfrak{g}}, X \in \mathfrak{a}$ , w tej bazie mają macierze postaci blokowej  $\begin{bmatrix} A(X) & B(X) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , natomiast macierze  $\text{ad}_X^{\mathfrak{a}}$  w bazie  $e_1, \dots, e_k$  pokrywają się z  $A(X)$ . Widać, że  $\text{Tr}(\text{ad}_X^{\mathfrak{g}} \text{ad}_Y^{\mathfrak{g}}) = \text{Tr}(A(X)A(Y)) = \text{Tr}(\text{ad}_X^{\mathfrak{a}} \text{ad}_Y^{\mathfrak{a}})$ .

*Ad. 2.* Niech  $Z \in \mathfrak{g}, X, Y \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp}$ . Wtedy  $B_{\mathfrak{g}}(Z, [X, Y]) = -B_{\mathfrak{g}}([X, Z], Y) = 0$  (bo  $[X, Z] \in \mathfrak{a}, Y \in \mathfrak{a}^{\perp}$ ), skąd  $[X, Y]$  jest ortogonalne do całej  $\mathfrak{g}$ , czyli musi być zero wskutek tego, że  $B_{\mathfrak{g}}$  jest niezdegenerowana. Innymi słowy,  $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp}$  jest *abelową* algebrą Liego (czyli z zerowym nawiasem  $[, ]$ ).

Wybermy teraz bazę  $e_1, \dots, e_n$  w  $\mathfrak{g}$  inaczej, tak, żeby  $e_1, \dots, e_m$  było bazą w  $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$ . Niech  $Z \in \mathfrak{g}, T \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$ . Wtedy  $\text{ad}_T \text{ad}_Z$  odwzorowuje  $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$  w zero (bo  $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$  jest ideałem jak i każde przecięcie dwóch ideałów, czyli  $[Z, \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp] \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$ , a ponadto jest abelowy, czyli  $[T, [Z, \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp]] = 0$ ). Natomiast przestrzeń naciągnięta na wektory  $e_{m+1}, \dots, e_n$  jest odwzorowywana przez endomorfizm  $\text{ad}_T \text{ad}_Z$  w  $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$  (bo  $\text{ad}_T$  wszystko odwzorowuje w  $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$ ).

W wybranej bazie macierz endomorfizmu  $\text{ad}_T \text{ad}_Z$  ma postać  $\begin{bmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , skąd  $\text{Tr}(\text{ad}_T \text{ad}_Z) = 0$ . wnioskujemy, że  $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$  jest ortogonalne do całej przestrzeni, czyli  $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp = \{0\}$ . Niezdegenerowość  $B_{\mathfrak{g}}$  implikuje równość  $\dim \mathfrak{a}^\perp = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{a}$ , która daje  $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \mathfrak{a}^\perp$ .

*Ad. 3.* Gdyby  $B_{\mathfrak{a}}$  było zdegenerowane, istniałby nietrywialny wektor  $v \in \ker B_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$ .  $\square$

**Prosta algebra Liego:** Jest to półprosta algebra Liego nie zawierająca nietrywialnych ideałów (ideały trywialne to  $\{0\}$  i cała algebra).

PRZYKŁAD: Wszystkie algebry z przykładów powyżej nie są proste.

**TWIERDZENIE** *Półprosta algebra Liego  $\mathfrak{g}$  jest sumą prostą  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_n$ , gdzie każde  $\mathfrak{g}_i$  jest ideałem będącym algebrą prostą. Ponadto każdy ideał algebry  $\mathfrak{g}$  jest sumą prostą pewnych  $\mathfrak{g}_i$ .*

*Dowód:* Jeśli  $\mathfrak{g}$  ma nietrywialny ideał  $\mathfrak{a}$ , rozszczepimy  $\mathfrak{g}$  na  $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$ . Oba ideały są półproste. Stosując powyższą procedurę do  $\mathfrak{a}$  i  $\mathfrak{a}^\perp$  indukcyjnie dojdziemy do ideałów prostych i otrzymamy rozkład  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_n$ .  $\square$

**WNIOSEK** *Dla półprostej algebry Liego  $\mathfrak{g}$  mamy  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ .*

*Dowód:* Istotnie,  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] \oplus \dots \oplus [\mathfrak{g}_n, \mathfrak{g}_n]$  (bo  $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = \{0\}$  dla  $i \neq j$ ). Ponadto  $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i]$  jest ideałem w  $\mathfrak{g}_i$ , czyli musi być równy  $\mathfrak{g}_i$  (nie może być zero, bo wtedy  $\mathfrak{g}_i$  byłaby abelową).  $\square$

**Półproste i proste grupy Liego:** Są to grupy Liego, których algebry Liego są odpowiednio półproste i proste.

## 6 Zwarte i półproste algebry Liego. Cz. II

Literatura dodatkowa: [Hel00, Pos86]

**Niezmienniczość formy Killinga ze względu na automorfizmy:**

LEMAT Niech  $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  będzie automorfizmem algebry Liego  $\mathfrak{g}$ . Wtedy  $B_{\mathfrak{g}}(\phi(X), \phi(Y)) = B_{\mathfrak{g}}(X, Y)$  dla dowolnych  $X, Y \in \mathfrak{g}$  (czyli  $\phi$  jest izometrią).

Dowód: Warunek automorfizmu  $\phi[X, Y] = [\phi(X), \phi(Y)]$  można przepisać w postaci  $\phi \circ \text{ad}_X Y = (\text{ad}_{\phi(X)} \circ \phi)Y$ . Stąd  $\text{ad}_{\phi(X)} = \phi \circ \text{ad}_X \circ \phi^{-1}$  oraz  $B_{\mathfrak{g}}(\phi(X), \phi(Y)) = \text{Tr}(\text{ad}_{\phi(X)} \text{ad}_{\phi(Y)}) = \text{Tr}(\phi \circ \text{ad}_X \circ \phi^{-1} \phi \circ \text{ad}_Y \circ \phi^{-1}) = \text{Tr}(\text{ad}_X \text{ad}_Y) = B_{\mathfrak{g}}(X, Y)$ .  $\square$

**Przykłady półprostych algebr Liego:** Niech  $E_{ij}$  będzie macierzą  $n \times n$  o jedynym niezerowym wyrazie równym 1 stojącym w  $i$ -tym wierszu i  $j$ -tej kolumnie. Wtedy ma miejsce wzór  $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ .

Dla macierzy diagonalnej  $X = \sum_i x_{ii}E_{ii}$  oznaczmy  $\psi_s(X) := x_{ii}$ . Wtedy  $\psi_s$  jest funkcjonałem liniowym na przestrzeni  $D$  macierzy diagonalnych  $n \times n$  oraz

$$[E_{ii}, E_{kl}] = (\psi_k(E_{ii}) - \psi_l(E_{ii}))E_{kl}, k \neq l$$

Według liniowości

$$[X, E_{kl}] = (\psi_k(X) - \psi_l(X))E_{kl}$$

dla dowolnej  $X \in D$ . Mamy też  $[X, Y] = 0$  dla dowolnych  $X, Y \in D$ .

Rozważmy algebrę  $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$  oraz jej podprzestrzeń  $\mathfrak{h} := D \cap \mathfrak{g}$ . Niech  $e_{ij} := E_{ii} - E_{jj}$ . Wtedy operatory  $\text{ad}_X, X \in \mathfrak{h}$ , są diagonalne w bazie  $e_{12}, e_{13}, \dots, e_{1n}, E_{ij}, i \neq j$ . W szczególności,  $B_{\mathfrak{g}}(X, X) = \text{Tr}(\text{ad}_X^2) = \sum_{kl} (\psi_k(X) - \psi_l(X))^2 = \sum_{kl} (\psi_k(X)^2 + \psi_l(X)^2 - 2\psi_k(X)\psi_l(X)) = 2n \text{Tr}(X^2) - 2(\text{Tr}(X))^2 = 2n \text{Tr}(X^2)$ .

Teraz niech  $X \in \mathfrak{g}$  będzie dowolną macierzą diagonalizowalną, czyli istnieje takie  $Y \in GL(n, \mathbb{K})$ , że  $Z := YXY^{-1} \in D$  (zauważmy, że odwzorowanie  $X \mapsto YXY^{-1}$  jest automorfizmem  $\mathfrak{g}$  oraz, że  $Z \in \mathfrak{h}$ ). Wtedy  $B_{\mathfrak{g}}(X, X) = B_{\mathfrak{g}}(Z, Z) = 2n \text{Tr}(Z^2) = 2n \text{Tr}(X^2)$ .

Teraz zauważmy, że każda macierz  $S \in \mathfrak{g}$  może być przybliżona macierzami diagonalizowalnymi. Istotnie, dla  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  to wystarczy wykazać dla klatki Jordana

$$J := \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}.$$

Niech  $\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)$  będą funkcjami ciągłymi takimi, że  $\lambda_i(0) = \lambda, i = 1, \dots, n$ , oraz  $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)$  gdy  $i \neq j$  oraz  $t \neq 0$ . Wtedy macierz

$$J(t) := \begin{bmatrix} \lambda_1(t) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n(t) \end{bmatrix}$$

jest diagonalizowalna (bo ma spektrum proste) oraz ma własność  $J(0) = J$ . Dla  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  działa podobny argument zastosowany do tzw. uogólnionych klatek Jordana.

Ostatecznie możemy skorzystać z ciągłości  $B_{\mathfrak{g}}$ , żeby wywnioskować, że  $B_{\mathfrak{g}}(X, X) = 2n \operatorname{Tr}(X^2)$  dla wszystkich  $X \in \mathfrak{g}$  oraz zastosować wzór polaryzacji do udowodnienia wzoru

$$B_{\mathfrak{g}}(X, Y) = 2n \operatorname{Tr}(XY) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Forma  $\operatorname{Tr}(XY)$  jest niezdegenerowana na  $\mathfrak{g}$  (*Ćwiczenie*), co pokazuje, że  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$  jest algebrą półprostą.

Można też pokazać, że dla algebry Liego  $\mathfrak{g} := \mathfrak{so}(n, \mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \mid X + X^T = 0\}$  macierzy antysymetrycznych spełniony jest wzór

$$B_{\mathfrak{g}}(X, Y) = (n - 2) \operatorname{Tr}(XY) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g},$$

który pokazuje, że  $\mathfrak{so}(n, \mathbb{K})$  też jest półprosta. Istotnie, dla  $X = \sum_{ij} x_{ij} E_{ij} \in \mathfrak{g}$  mamy  $x_{ij} = -x_{ji}$  oraz  $\operatorname{Tr}(X^2) = -\sum_{ij} x_{ij}^2 = -2 \sum_{i < j} x_{ij}^2$ . Jest to forma niezdegenerowana, a dla  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  zauważamy też, że jest  $< 0$ .

## Różniczkowania algebry półprostej

LEMAT *Jeśli  $\mathfrak{g}$  jest półprostą, to  $\partial(\mathfrak{g}) = \operatorname{ad}(\mathfrak{g})$ , czyli każde różniczkowanie jest wewnętrzne.*

*Dowód:* Algebra  $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})$  jest izomorficzna z  $\mathfrak{g}$ . Istotnie, jądro homomorfizmu  $\operatorname{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \operatorname{End}(\mathfrak{g})$  pokrywa się z centrum  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ . Skoro  $\mathfrak{g}$  jest półprosta, ma  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ , stąd  $\mathfrak{g}$  jest izomorficzna ze swoim obrazem względem  $\operatorname{ad}$ .

Algebra izomorficzna z półprostą sama jest półprosta (dowód tego jest bardzo podobny do dowodu Lematu na początku tego wykładu).

Okazuje się, że  $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})$  jest ideałem w  $\partial(\mathfrak{g})$ :  $[d, \operatorname{ad}_X] = \operatorname{ad}_{dX}$ ,  $d \in \partial(\mathfrak{g})$ ,  $X \in \mathfrak{g}$  (*Ćwiczenie*: udowodnij ten wzór). Rozważmy ideał  $\mathfrak{a} := (\operatorname{ad}(\mathfrak{g}))^\perp$  (dopełnienie ortogonalne względem  $B_{\partial(\mathfrak{g})}$ ) w  $\partial(\mathfrak{g})$ . Udowodnimy teraz, że  $\mathfrak{a} = \{0\}$ .

Niech  $d \in \mathfrak{a}$ . Wtedy  $[d, \operatorname{ad}_X] \in \mathfrak{a} \cap \operatorname{ad}(\mathfrak{g})$ . Ostatnia przestrzeń jest zerowa, ponieważ  $\mathfrak{a} \cap \operatorname{ad}(\mathfrak{g}) = \ker B_{\partial(\mathfrak{g})}|_{\operatorname{ad}(\mathfrak{g}) \times \operatorname{ad}(\mathfrak{g})} = B_{\operatorname{ad}(\mathfrak{g})} = \{0\}$ . Mamy  $0 = [d, \operatorname{ad}_X] = \operatorname{ad}_{dX}$  dla dowolnego  $X \in \mathfrak{g}$ . Stąd  $dX \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ , czyli  $dX = 0$  i  $d = 0$ .  $\square$

WNIOSEK *Dla algebry półprostej  $\mathfrak{g}$  nad  $\mathbb{R}$  grupa dołączona  $\operatorname{Int}(\mathfrak{g})$  pokrywa się ze składową jedyinki grupy automorfizmów  $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ . W szczególności  $\operatorname{Int}(\mathfrak{g})$  jest prawdziwą podgrupą Liego w  $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ .*

**Zwarta algebra Liego:** Jest to algebra Liego  $\mathfrak{g}$  nad  $\mathbb{R}$  taka, że jej grupa dołączona  $\operatorname{Int}(\mathfrak{g})$  jest zwarta.

TWIERDZENIE *1. Niech  $\mathfrak{g}$  będzie półprostą algebrą Liego nad  $\mathbb{R}$ . Wtedy  $\mathfrak{g}$  jest zwarta jeśli i tylko jeśli gdy  $B_{\mathfrak{g}} < 0$ .*

*2. Każda zwarta algebra Liego  $\mathfrak{g}$  jest sumą prostą  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ , gdzie ideał  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  jest półprosty i zwarty.*



*Dowód:* Niech  $\mathfrak{g}$  będzie półprosta z  $B_{\mathfrak{g}} < 0$ , a  $O(\mathfrak{g}) \subset GL(\mathfrak{g})$  oznacza grupę endomorfizmów zachowujących  $B_{\mathfrak{g}}$ . Wtedy  $O(\mathfrak{g})$  jest zwarta (jest to domknięty podzbiór sfery  $\text{Tr}(XX^T) = \text{Tr}(I)$ ), mamy też zwartość  $\text{Aut}(\mathfrak{g}) \subset O(\mathfrak{g})$  (jako domkniętego podzbioru zbioru zwartego) oraz zwartość  $\text{Int}(\mathfrak{g})$ .

Odwrotnie, niech  $\mathfrak{g}$  będzie zwarta. Wtedy  $G := \text{Int}(\mathfrak{g}) \subset GL(\mathfrak{g})$  jest zwartą podgrupą Liego. Istnieje wtedy niezmienniczy względem  $G$  dodatnio określony iloczyn skalarny  $(\cdot, \cdot)$  na  $\mathfrak{g}$  (dowód istnienia - poprzez uśrednienie, podobnie do przypadku grup skończonych, zob. Wykład 6 z Teorii grup I). W bazie ortonormalnej macierze endomorfizmów z  $\text{Int}(\mathfrak{g})$  są ortogonalne, a macierze elementów z  $\text{ad}(\mathfrak{g})$  są antysymetryczne. Mamy

$$B_{\mathfrak{g}}(X, X) = \text{Tr}(\text{ad}_X \text{ad}_X) = \sum_{ij} x_{ij} x_{ji} = - \sum_{ij} x_{ij}^2 \leq 0,$$

tutaj  $x_{ij}$  jest macierzą endomorfizmu  $\text{ad}_X$  w wybranej bazie ortonormalnej. Równość osiąga się wtedy i tylko wtedy, gdy  $\text{ad}_X = 0$ , czyli  $X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ . Rozważmy teraz dopełnienie ortogonalne  $\mathfrak{g}'$  do  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$  względem  $(\cdot, \cdot)$ . Niezmienniczość tego iloczynu ze względu na  $\text{ad}(\mathfrak{g})$  pokazuje, że  $\mathfrak{g}'$  też jest ideałem, skąd  $B_{\mathfrak{g}'} = B_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{g}' \times \mathfrak{g}'}$ . Przestrzeń  $\mathfrak{g}'$  jest dopełniająca do  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \ker B_{\mathfrak{g}}$ , dlatego  $B_{\mathfrak{g}'}$  jest niezdegenerowana i  $< 0$ . Stąd  $\mathfrak{g}'$  jest półprosta i zwarta. Ponadto  $[\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'] = \mathfrak{g}'$ , skąd  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'] = \mathfrak{g}'$ .  $\square$

**WNIOSEK** *Algebra Liego  $\mathfrak{g}$  jest zwarta wtedy i tylko wtedy gdy jest algebrą Liego pewnej zwartej grupy Liego.*

*Dowód:* Jeśli  $\mathfrak{g}$  jest zwarta, to  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(\mathbb{T} \times \text{Int}(\mathfrak{g}))$ , gdzie  $\mathbb{T}$  jest torusem wymiaru  $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ . Jeśli  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$  dla zwartej  $G$ , to  $\text{Int}(\mathfrak{g}) \cong G_0 / (Z \cap G_0)$  (tutaj  $G_0$  składowa jedyńki grupy  $G$ ).  $\square$

**PRZYKŁADY:** Grupy Liego  $O(n, \mathbb{R}) = \{x \in GL(n, \mathbb{R}) \mid xx^T = I\}$ ,  $SO(n, \mathbb{R}) = \{x \in O(n, \mathbb{R}) \mid \det x = 1\}$ ,  $U(n) = \{x \in GL(n, \mathbb{C}) \mid x\bar{x}^T = I\}$ ,  $SU(n) = \{x \in U(n) \mid \det x = 1\}$  i odpowiednie algebry Liego  $\mathfrak{o}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid X + X^T = 0\} = \mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ ,  $\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid X + \bar{X}^T = 0\}$ ,  $\mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{u}(n) \mid \text{Tr } X = 0\}$  są zwarte (*Ćwiczenie:* sprawdź to).

## 7 Rozwiązalne i nilpotentne algebry Liego. Twierdzenie Leviego.

Literatura dodatkowa: [Woj86, Pos86]

**Rozwiązalne i nilpotentne algebry Liego:** Niech  $\mathfrak{g}$  będzie algebrą Liego. Połóżmy  $\mathfrak{g}^0 := \mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{g}^n := [\mathfrak{g}^{n-1}, \mathfrak{g}^{n-1}]$  oraz  $\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{g}_n = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{n-1}]$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Otrzymujemy ciągi ideałów (*Ćwiczenie:* udowodnij, że  $\mathfrak{g}^n, \mathfrak{g}_n$  są ideałami w  $\mathfrak{g}$ )

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \supset \mathfrak{g}^1 \supset \dots$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \dots,$$

o własności  $\mathfrak{g}_n \supset \mathfrak{g}^n$ . Mówimy, że  $\mathfrak{g}$  jest *rozwiązalna (nilpotentna)* jeśli istnieje takie  $N \in \mathbb{N}$ , że  $\mathfrak{g}^N = \{0\}$  ( $\mathfrak{g}_N = \{0\}$ ). Powyższa własność pokazuje, że każda algebra nilpotentna jest rozwiązalna.

PRZYKŁAD: Każda algebra abelowa  $\mathfrak{g}$  (np. 1-wymiarowa) jest nilpotentna. Istotnie,  $\mathfrak{g}_1 = \{0\}$ .

PRZYKŁAD: Niech  $M(k) := \{[X_{ij}] \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \mid X_{ij} = 0 \forall i \geq j + k\}$ ,  $k = 0, 1, \dots$  będzie zbiorem macierzy o wyrazach zerowych poniżej „ $k$ -tej górnej diagonalii” (0-diagonala to diagonalna główna). Wtedy  $M(k)M(l) \subset M(k+l)$  (dokładniej  $M(k)M(l) = M(k+l)$ ). Stąd mamy, że algebra Liego macierzy ściśle górnotrójkątnych  $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}(n, \mathbb{K}) = M(1)$  jest nilpotentna. Istotnie,  $\mathfrak{g}_1 = [M(1), M(1)] \subset M(2)$ ,  $\mathfrak{g}_2 = [M(1), \mathfrak{g}_1] \subset M(3), \dots, \mathfrak{g}_k = [M(1), \mathfrak{g}_{k-1}] \subset M(k+1)$ , skąd  $\mathfrak{g}_n = \{0\}$ .

PRZYKŁAD: Algebra Liego  $\mathfrak{g} = \mathfrak{b}(n, \mathbb{K}) = M(0)$  macierzy górnotrójkątnych jest rozwiązalna. Istotnie,  $\mathfrak{g}^1 = [M(0), M(0)] \subset M(1)$  (tutaj wykorzystujemy fakt, że dla  $X, Y \in M(0)$  wyrazy diagonalne w iloczynach  $XY, YX$  są takie same). Dalej,  $\mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}^1, \mathfrak{g}^1] \subset [M(1), M(1)] \subset M(2)$ ,  $\mathfrak{g}^3 = [\mathfrak{g}^2, \mathfrak{g}^2] \subset [M(2), M(2)] \subset M(4)$ ,  $\mathfrak{g}^4 \subset M(8), \dots, \mathfrak{g}^k \subset M(2^{k-1})$ .

Zauważmy, że  $\mathfrak{g}$  nie jest nilpotentna:  $\mathfrak{g}_1 = [M(0), M(0)] = M(1)$ ,  $\mathfrak{g}_2 = [M(0), M(1)] = M(1), \dots, \mathfrak{g}_k = [M(0), M(k-1)] = M(1)$ .

**Związki z formą Killinga:** Jeśli  $\mathfrak{g}$  nilpotentna, z definicji wynika, że  $\text{ad}_{X_1} \circ \dots \circ \text{ad}_{X_N} = 0$  dla wystarczająco dużych  $N$  i dowolnych  $X_1, \dots, X_N \in \mathfrak{g}$ . W szczególności  $\text{ad}_X$  jest operatorem nilpotentnym dla dowolnego  $X \in \mathfrak{g}$  (przypomnijmy, że operator  $L$  jest nilpotentny, jeśli  $L^N = 0$  dla pewnego  $N \in \mathbb{N}$ ). Stąd mamy też, że  $B_{\mathfrak{g}} \equiv 0$ , ponieważ  $B_{\mathfrak{g}}(X, X) = \text{Tr}(\text{ad}_X^2)$ , a ślad operatora nilpotentnego jest równy zero (*dłaczego?*) (wykorzystujemy tu również tożsamość polaryzacyjną  $B_{\mathfrak{g}}(X, Y) = (B_{\mathfrak{g}}(X+Y, X+Y) - B_{\mathfrak{g}}(X, X) - B_{\mathfrak{g}}(Y, Y))/2$ ).

PRZYKŁAD: Niech  $\mathfrak{g} = \text{Span}_{\mathbb{C}}\{e_1, e_2, e_3\}$ ,  $[e_1, e_2] = e_2$ ,  $[e_1, e_3] = ie_3$ ,  $[e_2, e_3] = 0$ . Wtedy  $\text{ad}_{e_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$ ,  $\text{ad}_{e_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\text{ad}_{e_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}$  i  $B_{\mathfrak{g}} \equiv 0$ . *Ćwiczenie:* Sprawdzić bezpośrednio, że 1)  $\mathfrak{g}$  jest algebrą Liego; 2)  $\mathfrak{g}$  jest rozwiązalna; 3)  $\mathfrak{g}$  nie jest nilpotentna.

Ostatni punkt wynika też z następującego twierdzenia (bo  $\text{ad}_{e_1}$  nie jest nilpotentny), które przyjmujemy bez dowodu.

**TWIERDZENIE (Engel)** Algebra Liego  $\mathfrak{g}$  jest nilpotentna, jeśli  $\text{ad}_X$  jest operatorem nilpotentnym dla dowolnego  $X \in \mathfrak{g}$ .

Punkt 2) powyższego ćwiczenia jest wnioskiem z następnego twierdzenia, które też przyjmujemy bez dowodu.

**TWIERDZENIE** (*Kryterium Cartana rozwiązalności*) Algebra Liego  $\mathfrak{g}$  jest rozwiązalna wtedy i tylko wtedy, gdy  $\ker B_{\mathfrak{g}} \supset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  (inaczej  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^{\perp} = \mathfrak{g}$ ).

**Iloczyn półprosty algebr Liego  $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ :** Niech  $f : \mathfrak{g}_2 \rightarrow \mathfrak{d}(\mathfrak{g}_1)$  będzie homomorfizmem algebr Liego. Na sumie prostej  $\mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_1$  przestrzeni liniowych określamy nawias  $[(X_2, X_1), (Y_2, Y_1)] := ([X_2, Y_2]_2, [X_1, Y_1]_1 + f_{X_2}Y_1 - f_{Y_2}X_1)$ , gdzie  $f_X := f(X), X \in \mathfrak{g}_2$ . *Ćwiczenie:* sprawdź, że jest to nawias Liego na  $\mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_1$ . Oznaczamy  $\mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{g}_1 := (\mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_1, [, ])$ .

**Rozszerzenia algebr Liego:** Niech  $\mathfrak{g}$  będzie algebra Liego a  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$  jej ideałem. *Ćwiczenie:* 1) udowodnij, że działanie  $[X + \mathfrak{a}, Y + \mathfrak{a}] := [X, Y] + \mathfrak{a}$  na przestrzeni ilorazowej  $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$  jest określone poprawnie i zadaje strukturę algebry Liego; 2) pokaż, że jądro  $\ker \phi$  dowolnego homomorfizmu algebr Liego  $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  jest ideałem w  $\mathfrak{g}$ , a jego obraz  $\text{im } \phi$  podalgebra w  $\mathfrak{h}$ ; 3) udowodnij, że algebry Liego  $\text{im } \phi$  i  $\mathfrak{g}/\ker \phi$  są izomorficzne.

*Ciągiem dokładnym* algebr Liego nazywamy ciąg

$$\cdots \rightarrow \mathfrak{g}_{k-1} \xrightarrow{\phi_{k-1}} \mathfrak{g}_k \xrightarrow{\phi_k} \mathfrak{g}_{k+1} \rightarrow \cdots \quad (3)$$

algebr Liego i homomorfizmów pomiędzy nimi o własności  $\ker \phi_k = \text{im } \phi_{k-1}$  dla dowolnego  $k$ . *Rozszerzeniem* algebry Liego  $\mathfrak{g}_2$  za pomocą algebry Liego  $\mathfrak{g}_1$  nazywamy *krótki ciąg dokładny*

$$0 \rightarrow \mathfrak{g}_1 \xrightarrow{\iota} \mathfrak{g} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g}_2 \rightarrow 0.$$

Powyższe ćwiczenie pokazuje, że  $\mathfrak{g}_1$  jest ideałem w  $\mathfrak{g}$  oraz że  $\mathfrak{g}_2 \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1$ . Rozszerzenie (3) nazywamy *trywialnym* lub *rozszczepialnym*, jeśli istnieje cięcie  $s : \mathfrak{g}_2 \rightarrow \mathfrak{g}$  homomorfizmu  $\pi$  (czyli odwzorowanie liniowe o własności  $\pi \circ s = \text{Id}_{\mathfrak{g}_2}$ ) będące homomorfizmem algebr Liego.

**LEMAT** *Jeśli rozszerzenie (3) jest rozszczepialne, algebra Liego  $\mathfrak{g}$  jest izomorficzna z iloczynem półprostym algebr Liego  $\mathfrak{g}_2$  i  $\mathfrak{g}_1$ .*

*Dowód:* Za pośrednictwem włożenia  $\iota$  oraz cięcia  $s$  utożsamiamy  $\mathfrak{g}$  (jako przestrzeń liniową) z  $\mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_1$ .

Homomorfizm  $f : \mathfrak{g}_2 \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g}_1)$  budujemy w sposób następujący. Dla  $X \in \mathfrak{g}_2$  mamy  $\text{ad}_X \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_1$  (wskutek tego, że  $\mathfrak{g}_1$  jest ideałem). Otrzymaliśmy więc odwzorowanie  $f : X \mapsto \text{ad}_X|_{\mathfrak{g}_1} : \mathfrak{g}_2 \rightarrow \mathfrak{d}(\mathfrak{g}_1)$  będące homomorfizmem algebr Liego (ponieważ  $X \mapsto \text{ad}_X : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{d}(\mathfrak{g})$  jest homomorfizmem).

Skoro  $\iota(\mathfrak{g}_1) = (0, \mathfrak{g}_1)$  oraz  $s(\mathfrak{g}_2) = (\mathfrak{g}_2, 0)$  są podalgebrami, mamy  $[(0, X_1), (0, Y_1)] = (0, [X_1, Y_1]_1)$ ,  $[(X_2, 0), (Y_2, 0)] = ([X_2, Y_2]_2, 0)$ . Stąd  $[(X_2, X_1), (Y_2, Y_1)] = [(X_2, 0) + (0, X_1), (Y_2, 0) + (0, Y_1)] = ([X_2, Y_2]_2, 0) + (0, [X_1, Y_1]_1) + [(X_2, 0), (0, Y_1)] + [(0, X_1), (Y_2, 0)] = ([X_2, Y_2]_2, 0) + (0, [X_1, Y_1]_1) + (0, f_{X_2}Y_1) - (0, f_{Y_2}X_1) = ([X_2, Y_2]_2, [X_1, Y_1]_1 + f_{X_2}Y_1 - f_{Y_2}X_1)$ .  $\square$

**PRZYKŁAD:** Niech  $\mathfrak{g}$  będzie algebra Heisenberga,  $\mathfrak{g} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}, [(x, y, z), (x_1, y_1, z_1)] = (0, xz_1 - zx_1, 0)$ . Wtedy  $\mathfrak{g}_1 := \{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$  jest ideałem w  $\mathfrak{g}$ . *Ćwiczenie:* udowodnij, że  $\mathfrak{g}_2 := \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1$  jest 2-wymiarową algebra abelową i że rozszerzenie  $0 \rightarrow \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}_2 \rightarrow 0$  nie jest rozszczepialne.

### Radykał algebry Liego $\mathfrak{g}$ :

**LEMAT** *Jeśli  $\mathfrak{g}$  jest rozwiązalną algebra Liego, to dowolna jej podalgebra  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  jest rozwiązalna oraz algebra ilorazowa  $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$  względem dowolnego ideału  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$  jest rozwiązalna. Odwrotnie, jeśli  $\mathfrak{g}$  algebra Liego,  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$  ideał rozwiązalny oraz algebra ilorazowa  $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$  jest rozwiązalna, to  $\mathfrak{g}$  też jest rozwiązalna.*

*Dowód:* Mamy  $\mathfrak{h}^n \subset \mathfrak{g}^n$ , stąd pierwsza teza. Niech  $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$  będzie rzutem naturalnym. Wtedy  $(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^n = \pi(\mathfrak{g}^n)$ , stąd druga teza.

Teraz niech  $(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^N = \{0\}$  dla pewnego  $N$ . Wtedy  $\mathfrak{g}^N = \mathfrak{a}$  i, jeśli  $\mathfrak{a}^M = \{0\}$ , to  $\mathfrak{g}^{N+M} = \mathfrak{a}^M = \{0\}$ .  
□

**LEMAT** *Niech  $\mathfrak{g}$  będzie algebrą Liego, a  $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{g}$  jej ideałami rozwiązalnymi. Wtedy  $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$  też jest ideałem rozwiązalnym.*

*Dowód:* Suma dwóch ideałów jest ideałem (oczywiste). Mamy izomorfizm algebr Liego  $(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)/\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_1/(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2)$ . Ostatnia algebra jest rozwiązalna, a ideał  $\mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$  też jest rozwiązalny. Stąd  $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$  jest algebrą rozwiązalną. □

Sumę wszystkich ideałów rozwiązalnych danej algebry Liego  $\mathfrak{g}$  nazywamy *radykałem* tej algebry i oznaczamy  $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ . Następujące twierdzenie przyjmujemy bez dowodu.

**TWIERDZENIE** *Niech  $\mathfrak{g}$  będzie dowolną algebrą Liego. Wtedy*

1.  $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp$  (dopełnienie ortogonalne w sensie formy Killinga  $B_{\mathfrak{g}}$ );
2. algebra ilorazowa  $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$  jest półprosta;
3. rozszerzenie  $0 \rightarrow \mathfrak{r}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) \rightarrow 0$  jest rozszczepialne.

*Uwagi:* Z pierwszego punktu wynika, że radykał algebry półprostej jest trywialny. Ostatni punkt jest znany jako twierdzenie Leviego. Wynika z niego, że każda algebra Liego  $\mathfrak{g}$  jest iloczynem półprostym  $\mathfrak{g}_2 \ltimes \mathfrak{r}(\mathfrak{g})$  swojego radykału oraz pewnej algebry półprostej  $\mathfrak{g}_2$ . Algebry półproste są sklasyfikowane. Klasyfikacja algebr rozwiązalnych to problem otwarty.

**PRZYKŁAD:** Niech  $\mathfrak{g}_2 := \mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$  będzie algebrą Liego grupy obrotów. Wtedy  $\mathfrak{g}_2$  działa w sposób naturalny na  $\mathbb{R}^n$  za pomocą włożenia  $f : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^n)$ . Odpowiedni iloczyn półprosty  $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_2 \ltimes \mathbb{R}^n$  nazywamy algebrą *euklidesową* i oznaczamy  $\mathfrak{e}(n, \mathbb{R})$ . Jest to algebra Liego grupy Liego przekształceń euklidesowych  $\mathbb{R}^n$ . Tutaj  $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \mathbb{R}^n$  jest ideałem abelowym.

## 8 Podalgebra Cartana i rozkład na podprzestrzenie pierwiastkowe. Cz. I

*Literatura dodatkowa:* [Hel00]

W tym wykładzie będziemy zakładać, że  $\mathfrak{g}$  jest półprostą algebrą Liego nad  $\mathbb{C}$ . Naszym celem jest badanie struktury takich algebr.

**Podalgebra Cartana  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ :** Jest to podalgebra Liego o własnościach: 1)  $\mathfrak{h}$  jest maksymalna abelową podalgebrą Liego w  $\mathfrak{g}$  (czyli każda abelowa podalgebra  $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{g}$  zawierająca  $\mathfrak{h}$  pokrywa się z  $\mathfrak{h}$ ); 2) dla dowolnego  $X \in \mathfrak{h}$  endomorfizm  $\text{ad}_X \in \text{End}(\mathfrak{g})$  jest półprosty (= diagonalizowalny).

Okazuje się, że w każdej półprostej  $\mathfrak{g}$  istnieje podalgebra Cartana (zob. twierdzenie poniżej) oraz że każde dwie podalgebry Cartana  $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$  są „sprzężone”, czyli istnieje  $\sigma \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$  takie, że  $\sigma\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$ .

**Elementy regularne a podalgebra Cartana:** Niech  $H \in \mathfrak{g}$ , oznaczmy  $\mathfrak{g}(H, \lambda) := \{X \in \mathfrak{g} \mid (\text{ad}_H - \lambda \text{Id})^k X = 0 \text{ dla pewnego } k\}$ . Przestrzeń  $\mathfrak{g}(H, \lambda)$  jest zerowa, jeśli  $\lambda$  nie należy do spektrum  $\text{ad}_H$ , lub pokrywa się z przestrzenią pierwiastkową endomorfizmu  $\text{ad}_H$ , jeśli  $\lambda$  jest jedną z wartości własnych.

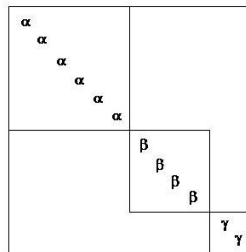
Element  $H \in \mathfrak{g}$  nazywamy *regularnym*, jeśli

$$\dim \mathfrak{g}(H, 0) = \min_{X \in \mathfrak{g}} \dim \mathfrak{g}(X, 0).$$

Zauważmy, że przestrzeń  $\mathfrak{g}(H, 0)$  zawiera podalgebrę  $\mathfrak{g}_H := \{X \in \mathfrak{g} \mid \text{ad}_X H = 0\}$  będącą algebrą Liego stabilizatora  $G_H := \{x \in G \mid \text{Ad}_x H = H\}$  elementu  $H$  względem działania dołączonego. Jeśli  $\text{ad}_H$  jest półprosty, rozkład Jordana pokazuje, że  $\mathfrak{g}(H, 0) = \ker \text{ad}_H = \mathfrak{g}_H$ .

**PRZYKŁAD:** Niech  $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ , a  $H \in \mathfrak{g}$  będzie macierzą diagonalną. Wtedy  $\text{ad}_H$  będzie endomorfizmem półprosty. Istotnie, macierze  $H_{12} := E_{11} - E_{22}, H_{23} := E_{22} - E_{33}, \dots, H_{n-1,n} := E_{n-1,n-1} - E_{nn}$  tworzą bazę przestrzeni  $\mathfrak{h}$  macierzy diagonalnych bezśladowych i  $H$  można wyrazić jako kombinację liniową tych macierzy. Z drugiej strony  $\text{ad}_{H_{ij}}$  jest diagonalny w bazie  $H_{i'j'}, E_{kl}, k \neq l$ :  $[H_{ij}, H_{i'j'}] = 0, [H_{ij}, E_{ij}] = 2E_{ij}, [H_{ij}, E_{ji}] = -2E_{ji}, [H_{ij}, E_{ij'}] = E_{ij'}, j' \neq j, [H_{ij}, E_{i'j}] = -E_{i'j}, i' \neq i$ .

Stąd  $\mathfrak{g}(H, 0) = \mathfrak{g}_H$ . Niech teraz  $H_0$ , ma spektrum proste (czyli nie ma krotnych wartości własnych). Łatwo widzieć, że wtedy  $\mathfrak{g}_H = \mathfrak{h}$ . W przypadku, gdy  $H$  ma krotności w spektrum, algebra  $\mathfrak{g}_H$  jest większa, jak to ilustruje następujący rysunek:



*Ćwiczenie:* pokaż, że  $\dim \mathfrak{g}(H, 0) = \dim \mathfrak{g}_H = n - 1$  jest minimalnym możliwym wymiarem, czyli  $H$  jest elementem regularnym w przypadku prostego spektrum (*skorzystaj z rozkładu Jordana*). W ogólności jest prawdziwe następujące twierdzenie, które przyjmujemy bez dowodu.

**TWIERDZENIE** Niech  $\mathfrak{g}$  będzie algebrą półprostą nad  $\mathbb{C}$ , a  $H_0 \in \mathfrak{g}$  będzie elementem regularnym. Wtedy  $\mathfrak{g}(H_0, 0)$  jest podalgebrą Cartana w  $\mathfrak{g}$ .

### Pierwiaski i podprzestrzenie pierwiaskowe:

**LEMAT** Niech  $A, B \in \text{End}(V)$  będą półprostymi komutującymi endomorfizmami przestrzeni liniowej  $V$ . Wtedy  $A$  i  $B$  są jednocześnie diagonalizowalne, czyli istnieje baza przestrzeni  $V$  składająca się z wektorów własnych operatorów  $A$  i  $B$ .

*Dowód:* Niech  $v \in V$  będzie wektorem własnym operatora  $A$  odpowiadającym wartości własnej  $\lambda$ :  $Av = \lambda v$ . Wtedy  $Bv$  też jest wektorem własnym operatora  $A$  odpowiadającym wartości własnej  $\lambda$ :  $ABv = BAv = B\lambda v = \lambda Bv$ . Stąd podprzestrzeń własna  $V' := V(A, \lambda) = \{v \in V \mid Av = \lambda v\}$  operatora  $A$  jest podprzestrzenią niezmienniczą operatora  $B$ . Ograniczenie  $B|_{V'}$  jest operatorem diagonalizowalnym, czyli istnieje baza przestrzeni  $V'$ , w której  $B|_{V'}$  jest diagonalny. W tej że bazie  $A|_{V'}$  jest skalarny. Wybierając podobne bazy we wszystkich przestrzeniach własnych operatora  $A$ , otrzymujemy wynik.  $\square$

W dalszej części wykładu  $\mathfrak{h}$  będzie oznaczało ustaloną podalgebrę Cartana w  $\mathfrak{g}$ .

Zauważmy, że operatory  $\text{ad}_H, H \in \mathfrak{h}$ , są diagonalizowalne i komutujące, skąd wnioskujemy, że w  $\mathfrak{g}$  istnieje baza złożona z wektorów własnych wszystkich operatorów  $\text{ad}_H$ . Niech  $X \in \mathfrak{g}$  będzie elementem takiej bazy. Wtedy  $\text{ad}_H X = \alpha(H)X$ , gdzie  $\alpha(H)$  odpowiednia wartość własna. Okazuje się, że  $\alpha$  liniowo zależy od  $H$ . Istotnie,  $\alpha(\beta_1 H_1 + \beta_2 H_2)X = \text{ad}_{\beta_1 H_1 + \beta_2 H_2} X = \beta_1 \text{ad}_{H_1} X + \beta_2 \text{ad}_{H_2} X = (\beta_1 \alpha(H_1) + \beta_2 \alpha(H_2))X$ .

Niech teraz  $\alpha \in \mathfrak{h}^*$  będzie dowolnym funkcjonałem liniowym na  $\mathfrak{h}$ . Oznaczmy

$$\mathfrak{g}^\alpha := \{X \in \mathfrak{g} \mid \text{ad}_H X = \alpha(H)X \ \forall H \in \mathfrak{h}\}.$$

Funkcjonał  $\alpha$  nazywamy *pierwiastkiem*  $\mathfrak{g}$  względem  $\mathfrak{h}$ , jeśli  $\mathfrak{g}^\alpha \neq \{0\}$  (a odpowiednie  $\mathfrak{g}^\alpha$  nazywamy *podprzestrzenią pierwiastkową*).

**LEMAT** 1.  $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$ ;

2. dla dowolnych  $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$  mamy  $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$ .

*Dowód:* Ad. 1. Mamy  $\mathfrak{g}^0 = \{X \in \mathfrak{g} \mid [\mathfrak{h}, X] = 0\}$ , czyli  $\mathfrak{g}^0$  składa się z elementów  $\mathfrak{g}$  komutujących z  $\mathfrak{h}$ . Ale  $\mathfrak{h}$  z definicji jest maksymalną podalgebrą abelową, czyli takie elementy leżą jedynie w  $\mathfrak{h}$ .

Ad. 2. niech  $X \in \mathfrak{g}^\alpha, Y \in \mathfrak{g}^\beta$ . Wtedy  $\text{ad}_H[X, Y] = [\text{ad}_H X, Y] + [X, \text{ad}_H Y] = (\alpha(H) + \beta(H))[X, Y]$  dla dowolnego  $H \in \mathfrak{h}$ , skąd  $[X, Y] \in \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$ .  $\square$

Niech  $\Delta \subset \mathfrak{h}^*$  oznacza zbiór *niezerowych* pierwiastków.

**TWIERDZENIE** 1.  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}^\alpha$  (suma prosta podprzestrzeni).

2.  $\dim \mathfrak{g}^\alpha = 1$  dla każdego  $\alpha \in \Delta$ .

3. Niech  $\alpha, \beta$  będą dwoma pierwiastkami o własności  $\alpha + \beta \neq 0$ . Wtedy  $B_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta) = 0$ .

4. Ograniczenie  $B_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$  jest niezdegenerowane. W szczególności dla każdego  $\alpha \in \mathfrak{h}^*$  istnieje jedyny element  $H_\alpha \in \mathfrak{h}$  taki, że  $B_{\mathfrak{g}}(H, H_\alpha) = \alpha(H)$  dla wszystkich  $H \in \mathfrak{h}$ .

5. Jeśli  $\alpha \in \Delta$ , to  $-\alpha \in \Delta$  oraz

$$[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}] = \mathbb{C}H_\alpha,$$

przy czym  $\alpha(H_\alpha) \neq 0$ .

*Dowód w następnym Wykładzie.*

PRZYKŁAD: Niech  $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C}) =: \mathfrak{a}_n$  oraz  $H_i := E_{ii} - E_{i+1, i+1}, i = 1, \dots, n$ . Wtedy  $\mathfrak{h} = \sum_i \mathbb{C}H_i$  (algebra diagonalnych macierzy bezśladowych) oraz

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{i \neq j} \mathbb{C}E_{ij}.$$

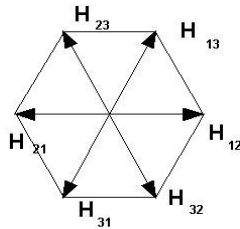
Dla  $H \in \mathfrak{h}$  niech  $e_i(H)$  oznacza odpowiedni element diagonalny. Mamy

$$[H, E_{ij}] = (e_i(H) - e_j(H))E_{ij},$$

czyli pierwiastek odpowiadający przestrzeni pierwiastkowej  $\mathbb{C}E_{ij}$  jest równy  $e_i - e_j \in \mathfrak{h}^*, ij \in \{1, \dots, n+1\}$ .

Już obliczyliśmy, że  $B_{\mathfrak{g}}(X, Y) = 2(n+1) \text{Tr}(XY), X, Y \in \mathfrak{g}$ . Jasne, że ograniczenie takiej formy na  $\mathfrak{h}$  jest niezdegenerowane. W szczególności,  $B_{\mathfrak{g}}(H, H_{ij}) = (e_i - e_j)(H)$  dla macierzy  $H_{ij} = \frac{1}{2(n+1)}(E_{ii} - E_{jj})$ .

Rozważmy przestrzeń  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} := \sum_{ij} \mathbb{R}H_{ij}$ . W przypadku  $n = 2$  jest to 2-wymiarowa przestrzeń rzeczywista, a układ pierwiastków wygląda w niej następująco:



## 9 Podalgebry Cartana i rozkład na podprzestrzenie pierwiastkowe. Cz. II

Literatura dodatkowa: [Hel00]

PRZYKŁAD: Niech  $\mathfrak{g} := \mathfrak{so}(2n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C}) \mid X + X^T = 0\} =: \mathfrak{d}_n$  oraz  $H_1 := E_{12} - E_{21}$ ,  $H_2 = E_{34} - E_{43}, \dots, H_n := E_{2n-1, 2n} - E_{2n, 2n-1}$ , czyli  $H_i := E_{2i-1, 2i} - E_{2i, 2i-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Oznaczmy też  $F_{ij} := E_{ij} - E_{ji}$  oraz

$$G_{jk}^+ := F_{2j-1, 2k-1} + F_{2j, 2k} + i(F_{2j-1, 2k} - F_{2j, 2k-1})$$

$$G_{jk}^- := F_{2j-1, 2k-1} - F_{2j, 2k} + i(F_{2j-1, 2k} + F_{2j, 2k-1}),$$

gdzie  $j, k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $j \neq k$ . Na przykład dla  $n = 2$  mamy:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G_{12}^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ -1 & i & 0 & 0 \\ -i & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, G_{12}^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & i & -1 \\ -1 & -i & 0 & 0 \\ -i & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G_{21}^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & i \\ 0 & 0 & -i & -1 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ -i & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G_{21}^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & i \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ -i & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bezpośrednio sprawdzają się (*Ćwiczenie*) wzory

$$[H, G_{jk}^+] = (e_j(H) - e_k(H))G_{jk}^+ \quad (1 \leq j \neq k \leq n)$$

$$[H, G_{jk}^-] = -(e_j(H) + e_k(H))G_{jk}^- \quad (1 \leq j < k \leq n)$$

$$[H, G_{jk}^-] = (e_j(H) + e_k(H))G_{jk}^- \quad (1 \leq k < j \leq n),$$

gdzie  $e_j(H_k) = -i\delta_{jk}$ . Stąd widzimy, że podalgebrą Cartana jest

$$\mathfrak{h} := \sum_i \mathbb{C}H_i,$$

a rozkład na podprzestrzenie pierwiastkowe wygląda tak:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{j \neq k} \mathbb{C}G_{jk}^+ + \sum_{j \neq k} \mathbb{C}G_{jk}^-.$$

Teraz możemy obliczyć formę Killinga:  $B_{\mathfrak{g}}(H, H) = \text{Tr}(\text{ad}_H^2) = \sum_{j \neq k} ((e_j(H) - e_k(H))^2 + (e_j(H) + e_k(H))^2) = 2 \sum_{j \neq k} (e_j(H)^2 + e_k(H)^2) = 4 \sum_{j < k} (e_j(H)^2 + e_k(H)^2) = 4(n-1) \sum_{i=1}^n e_i(H)^2 = 2(n-1) \text{Tr}(H^2)$ . Prawie każdy element z  $\mathfrak{g}$  jest sprzężony do pewnej macierzy z  $\mathfrak{h}$  (przyjmujemy to bez

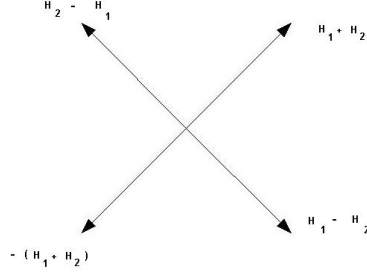


dowodu). Stąd wnioskujemy (podobnie jak to robiliśmy dla  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ ), że  $B_{\mathfrak{g}}(X, Y) = (2n-2) \text{Tr}(XY)$  i, że  $\mathfrak{g}$  jest półprosta.

Pierwiastki są dane przez

$$e_i - e_j \quad (1 \leq i, j \leq n), \quad \pm(e_i + e_k) \quad (1 \leq j < k \leq n).$$

Rozważmy przestrzeń  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} := \sum_i \mathbb{R}H_i$ . W przypadku  $n = 2$  jest to 2-wymiarowa przestrzeń rzeczywista, a układ pierwiastków wygląda w niej następująco:



PRZYKŁAD: Niech  $\mathfrak{g} := \mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2n+1, \mathbb{C}) \mid X + X^T = 0\} =: \mathfrak{b}_n$ . Podalgbrę Cartana określamy jak wcześniej  $\mathfrak{h} := \sum_{i=1}^n \mathbb{C}H_i$ . Wprowadźmy dodatkowo macierze

$$D_j^{\pm} := F_{2j-1, 2n+1} \pm iF_{2j, 2n+1} \quad (1 \leq j \leq n).$$

Na przykład dla  $n = 2$  mamy

$$D_1^{\pm} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pm i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \mp i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2^{\pm} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pm i \\ 0 & 0 & -1 & \mp i & 0 \end{bmatrix}.$$

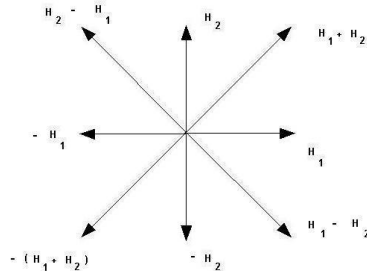
Sprawdzamy (*Ćwiczenie*), że  $[H, D_j^{\pm}] = \mp e_j(H) D_j^{\pm}$ . Stąd mamy rozkład na podprzestrzenie pierwiastkowe

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{j \neq k} \mathbb{C}G_{jk}^+ + \sum_{j \neq k} \mathbb{C}G_{jk}^- + \sum_{j=1}^n \mathbb{C}D_j^+ + \sum_{j=1}^n \mathbb{C}D_j^-.$$

Argumenty podobne do powyższych pokazują, że  $B_{\mathfrak{g}}(X, Y) = (2n-1) \text{Tr}(XY)$  oraz, że  $\mathfrak{g}$  jest półprosta. Pierwiastki są dane przez

$$\pm e_i \quad (1 \leq i \leq n), \quad e_i - e_j \quad (1 \leq i, j \leq n), \quad \pm(e_i + e_k) \quad (1 \leq j < k \leq n),$$

a dla  $n = 2$  w przestrzeni  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  wyglądają tak:



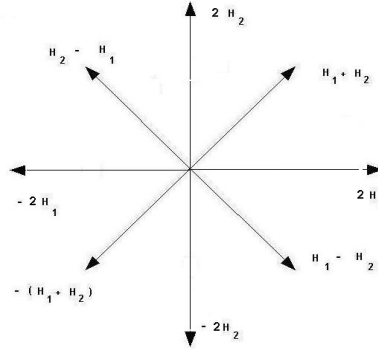
PRZYKŁAD Niech  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C}) \mid XJ + JX = 0\} =: \mathfrak{c}_n$ , tutaj  $J := \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$  jest macierzą  $2n \times 2n$ . (Ćwiczenie: sprawdź, że macierze z  $\mathfrak{g}$  mają postać  $\begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{bmatrix}$ , gdzie  $A, B, C \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ , przy czym  $B, C$  symetryczne). Podalgebra Cartana ma postać  $\mathfrak{h} = \sum_{i=1}^n \mathbb{C}H_i$ , gdzie  $H_i := E_{ii} - E_{n+i, n+i}$ , pierwiastki dane są wzorem  $e_i(H_j) = \delta_{ij}$ . Rozkład na podprzestrzenie pierwiastkowe jest następujący

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{i \leq j} \mathbb{C}(E_{n+i, j} + E_{n+j, i}) + \sum_{i \leq j} \mathbb{C}(E_{i, n+j} + E_{j, n+i}) + \sum_{i \neq j} \mathbb{C}(E_{ij} - E_{n+j, n+i}).$$

Forma Killinga ma postać  $B_{\mathfrak{g}}(X, Y) = (2n + 2) \operatorname{Tr}(XY)$ , a układ pierwiastków

$$\pm e_i \quad (1 \leq i \leq n), \quad \pm e_i \pm e_j \quad (1 \leq i < j \leq n).$$

Dla  $n = 2$  mamy (w  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ )



Forma Killinga w tym przypadku ma postać  $B_{\mathfrak{g}}(X, Y) = (2n + 2) \operatorname{Tr}(XY)$ .

*Dowód twierdzenia z poprzedniego wykładu: Ad. 1.* Wykażemy, że suma  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}^{\alpha}$  jest prosta. Niech  $H' \in \mathfrak{h}$ ,  $X_{\alpha_i} \in \mathfrak{g}^{\alpha_i}$  (pierwiastki  $\alpha_i$  są różne i niezerowe) będą takie, że  $H' + \sum_i X_{\alpha_i} = 0$ . Wtedy można wybrać  $H \in \mathfrak{h}$  tak, żeby  $\alpha_i(H)$  były liczbami różnymi i niezerowymi (bo zbiór takich  $H \in \mathfrak{h}$ , że któreś  $\alpha_i(H)$  są zerowe lub pokrywają się, jest sumą skończonej liczby hiperpłaszczyzn). Stąd wnioskujemy, że  $H', X_{\alpha_i}$  leżą w podprzestrzeniach własnych endomorfizmu  $\operatorname{ad}_H$  odpowiadających różnym wartościom własnym, czyli są liniowo niezależne.

*Ad. 3.* Niech  $X \in \mathfrak{g}^{\alpha}$ ,  $Y \in \mathfrak{g}^{\beta}$ ,  $\alpha + \beta \neq 0$ . Wtedy dla dowolnego pierwiastka  $\gamma$  endomorfizm  $\operatorname{ad}_X \operatorname{ad}_Y$  odwzorowuje  $\mathfrak{g}^{\gamma}$  w  $\mathfrak{g}^{\alpha+\beta+\gamma}$  oraz  $\mathfrak{g}^{\gamma} \cap \mathfrak{g}^{\alpha+\beta+\gamma} = \{0\}$ . Wybierzmy teraz bazę w  $\mathfrak{g}$ , każdy element której leży w pewnym  $\mathfrak{g}^{\gamma}$ . W takiej bazie macierz  $\operatorname{ad}_X \operatorname{ad}_Y$  będzie miała zerowe elementy na diagonalu, czyli  $B_{\mathfrak{g}}(X, Y) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad}_X \operatorname{ad}_Y) = 0$ .

*Ad. 4.* Niech  $H_0 \in \mathfrak{h}$  będzie takie, że  $B_{\mathfrak{g}}(H_0, H) = 0$  dla dowolnego  $H \in \mathfrak{h}$ . Wtedy punkt 3 pokazuje, że  $B_{\mathfrak{g}}(H_0, X) = 0$  dla dowolnego  $X \in \mathfrak{g}$ . Ponieważ z definicji  $B_{\mathfrak{g}}$  jest niezdegenerowana, mamy  $H_0 = 0$ .

## 10 Podalgebry Cartana i rozkład na podprzestrzenie pierwiastkowe. Cz. III

*Literatura dodatkowa:* [Hel00]

*Zakończenie dowodu twierdzenia z Wykładu 8: Ad. 5.* Niech  $\alpha \in \Delta$ . Wtedy  $\mathfrak{g}^{-\alpha}$  nie może być zerowe, bo to implikowałoby (na mocy punktu 3) ortogonalność  $\mathfrak{g}^\alpha$  do całej  $\mathfrak{g}$ . Stąd  $-\alpha \in \Delta$ .

Niech  $H \in \mathfrak{h}$ ,  $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ ,  $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ . Wiemy, że  $[X_\alpha, X_{-\alpha}] \subset \mathfrak{h}$ . Ponadto  $B_{\mathfrak{g}}([X_\alpha, X_{-\alpha}], H) = -B_{\mathfrak{g}}(X_{-\alpha}, [X_\alpha, H]) = B_{\mathfrak{g}}(X_{-\alpha}, [H, X_\alpha]) = B_{\mathfrak{g}}(X_{-\alpha}, \alpha(H)X_\alpha) = \alpha(H)B_{\mathfrak{g}}(X_\alpha, X_{-\alpha}) = B_{\mathfrak{g}}(H_\alpha, H)B_{\mathfrak{g}}(X_\alpha, X_{-\alpha}) = B_{\mathfrak{g}}(B_{\mathfrak{g}}(X_\alpha, X_{-\alpha})H_\alpha, H)$ . Z niezdegenerowania  $B_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$  (punkt 4) wnioskujemy, że

$$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = B_{\mathfrak{g}}(X_\alpha, X_{-\alpha})H_\alpha.$$

Teraz udowodnimy, że  $\alpha(H_\alpha) \neq 0$ . Niech  $E_\alpha := X_\alpha, E_{-\alpha} := X_{-\alpha} \neq 0$ . Wtedy  $B_{\mathfrak{g}}(X_\alpha, X_{-\alpha}) \neq 0$  (inaczej  $X_\alpha$  byłoby ortogonalne do  $\mathfrak{g}$ ). Można tak wybrać wektor  $E_{-\alpha}$  proporcjonalny do  $X_{-\alpha}$ , żeby

$$B_{\mathfrak{g}}(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1.$$

Dla pierwiastka  $\beta$  oznaczmy  $\mathfrak{g}(\beta, \alpha) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{g}^{\beta+n\alpha}$ , gdzie  $N$  jest zbiorem tych  $n \in \mathbb{Z}$ , dla których  $\beta+n\alpha$  jest pierwiastkiem. Z tożsamości  $[\mathfrak{g}^{\alpha'}, \mathfrak{g}^{\beta'}] \subset \mathfrak{g}^{\alpha'+\beta'}$  wnioskujemy, że  $\mathfrak{g}(\beta, \alpha)$  jest podprzestrzenią niezmienniczą dla  $\text{ad}_{E_\alpha}, \text{ad}_{E_{-\alpha}}, \text{ad}_H$ . Ponieważ  $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha$ , mamy

$$\text{Tr}(\text{ad}_{H_\alpha}|_{\mathfrak{g}(\beta, \alpha)}) = \text{Tr}(\text{ad}_{[E_\alpha, E_{-\alpha}]}|_{\mathfrak{g}(\beta, \alpha)}) = \text{Tr}([\text{ad}_{E_\alpha}, \text{ad}_{E_{-\alpha}}]|_{\mathfrak{g}(\beta, \alpha)}) = 0$$

(śląd dowolnego komutatora jest równy zero).

Z innej strony, ponieważ  $\text{ad}_{H_\alpha}$  jest operatorem diagonalnym na  $\mathfrak{g}(\beta, \alpha)$ , mamy

$$\text{Tr}(\text{ad}_{H_\alpha}|_{\mathfrak{g}(\beta, \alpha)}) = \sum_{n \in N} (\beta + n\alpha)(H_\alpha) \dim \mathfrak{g}^{\beta+n\alpha}.$$

Stąd  $\beta(H_\alpha) \sum_{n \in N} \dim \mathfrak{g}^{\beta+n\alpha} = -\alpha(H_\alpha) \sum_{n \in N} n \dim \mathfrak{g}^{\beta+n\alpha}$  dla każdego  $\alpha \in \Delta$  i każdego pierwiastka  $\beta$ . Gdyby  $\alpha(H_\alpha) = 0$ , mielibyśmy  $\beta(H_\alpha) = 0$  (bo  $\dim \mathfrak{g}^{\beta+n\alpha} \geq \dim \mathfrak{g}^\beta > 0$ ). Z kolei to powodowałoby równość  $\text{ad}_{H_\alpha} \mathfrak{g}^\beta = 0$  (bo  $\text{ad}_{H_\alpha} X_\beta = \beta(H_\alpha)X_\beta, X_\beta \in \mathfrak{g}^\beta$ ), czyli  $\text{ad}_{H_\alpha} = 0$ , co jest niemożliwe z powodu trywialności centrum  $\mathfrak{g}$ .

*Ad. 2.* Załóżmy, że  $\dim \mathfrak{g}^\alpha > 1$ . Wtedy istnieje takie  $D_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha, D_\alpha \neq 0$ , że  $B_{\mathfrak{g}}(D_\alpha, E_{-\alpha}) = 0$ . Oznaczmy  $D_{-1} := 0, D_n := (\text{ad}_{E_\alpha})^n D_\alpha, n = 0, 1, \dots$ . Wtedy  $D_n \in \mathfrak{g}^{(n+1)\alpha}$  oraz  $[E_{-\alpha}, D_n] = [E_{-\alpha}, (\text{ad}_{E_\alpha})^n D_\alpha] = \text{ad}_{E_\alpha}[E_{-\alpha}, (\text{ad}_{E_\alpha})^{n-1} D_\alpha] - [\text{ad}_{E_\alpha} E_{-\alpha}, (\text{ad}_{E_\alpha})^{n-1} D_\alpha] = \text{ad}_{E_\alpha}[E_{-\alpha}, D_{n-1}] - [H_\alpha, D_{n-1}] = \text{ad}_{E_\alpha}[E_{-\alpha}, D_{n-1}] - n\alpha(H_\alpha)D_{n-1}$ . W szczególności,  $[E_{-\alpha}, D_{n-1}] = \text{ad}_{E_\alpha}[E_{-\alpha}, D_{n-2}] - (n-1)\alpha(H_\alpha)D_{n-2}$ , dlatego  $[E_{-\alpha}, D_n] = \text{ad}_{E_\alpha}(\text{ad}_{E_\alpha}[E_{-\alpha}, D_{n-2}] - (n-1)\alpha(H_\alpha)D_{n-2}) - n\alpha(H_\alpha)D_{n-1} = (\text{ad}_{E_\alpha})^2[E_{-\alpha}, D_{n-2}] - (n-1)\alpha(H_\alpha)D_{n-1} - n\alpha(H_\alpha)D_{n-1}$ . Stosując indukcję otrzymujemy

$$[E_{-\alpha}, D_n] = (\text{ad}_{E_\alpha})^n [E_{-\alpha}, D_0] - (1 + 2 + \dots + n)\alpha(H_\alpha)D_{n-1} = -\frac{n(n+1)}{2}\alpha(H_\alpha)D_{n-1}$$

(skorzystaliśmy z tego, że  $[E_{-\alpha}, D_0] = [E_{-\alpha}, D_\alpha] = B_{\mathfrak{g}}(E_{-\alpha}, D_\alpha)H_\alpha = 0$ ). Ponieważ  $D_0 \neq 0$ , powyższa równość pokazuje, że  $D_n \neq 0$  dla  $n = 1, 2, \dots$ , co jest niemożliwe (zbiór pierwiastków jest skończony).  $\square$

**Dalsze własności pierwiastków i rozkładu na podprzestrzenie pierwiastkowe:** Niech  $\alpha \in \Delta$ , a  $\beta$  będzie dowolnym pierwiastkiem. Zbiór wszystkich pierwiastków postaci  $\beta + n\alpha, n \in \mathbb{Z}$ , nazywamy  $\alpha$ -szeregiem zawierającym  $\beta$ . Maksymalną z liczb  $n$  o tej własności, że  $\beta + n\alpha$  jest pierwiastek będziemy oznaczać przez  $q = q(\beta, \alpha)$ , a minimalną przez  $p = p(\beta, \alpha)$ .

LEMAT 1.  $\beta + n\alpha$  jest pierwiastkiem dla każdego  $n, p \leq n \leq q$ .

2.  $-2 \frac{\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)} = p + q$ .

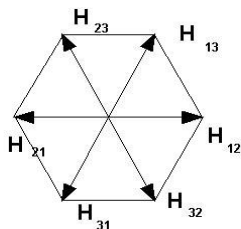
3.  $\alpha$ -szereg zawierający 0 jest postaci  $-\alpha, 0, \alpha$ .

4. Układ pierwiastków  $\Delta$  jest niezmienniczy ze względu na odbicia podalgebry Cartana  $\mathfrak{h}$

$$s_\alpha : H \mapsto H - 2 \frac{\alpha(H)}{\alpha(H_\alpha)} H_\alpha$$

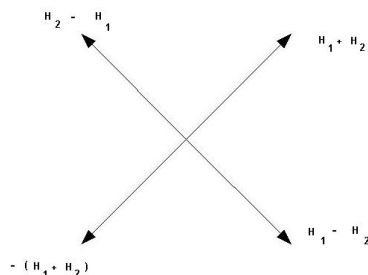
względem hiperpłaszczyzny  $\{H \in \mathfrak{h} \mid \alpha(H) = 0\}$ .

PRZYKŁAD:



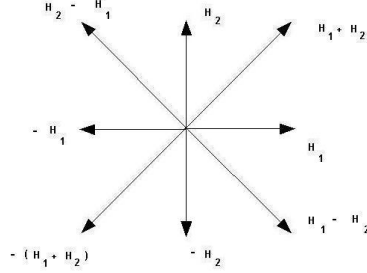
Niech  $\alpha := H_{12}, \beta = H_{23}$ . Wtedy  $\alpha$ -szereg zawierający  $\beta$  to  $H_{23}, H_{13}$ , mamy też  $p = 0, q = 1$ . Podobnie, szereg będą tworzyły dowolne dwa sąsiednie pierwiastki. Są też szeregi jak w p. 2 powyższego lematu.

PRZYKŁAD:



Tutaj są szeregi wyłącznie jak w p. 2 lematu.

PRZYKŁAD:



Tutaj mamy kilka typów szeregów. Przykładowo, dla  $\alpha = H_1, \beta = H_2$  mamy szereg  $H_2 - H_1, H_2, H_2 + H_1$  z  $p = -1, q = 1$ . Dla  $\alpha = H_1, \beta = H_1 + H_2$  mamy szereg  $H_2 - H_1, H_2, H_2 + H_1$  z  $p = -2, q = 0$ . Dla  $\alpha = H_1, \beta = H_2 - H_1$  mamy  $H_2 - H_1, H_2, H_2 + H_1$  z  $p = 0, q = 2$ . Dla  $\alpha = H_2 - H_1, \beta = H_1$  mamy  $H_1, H_2$  z  $p = 0, q = 1$ . Są też szeregi jak w p. 2 powyższego lematu.

*Dowód lematu:* Ad. 1,2. Niech  $E_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha, E_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$  będą takie, że  $B(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1$ . Niech  $r, s \in \mathbb{Z}$  będą takie, że  $\beta + n\alpha$  jest pierwiastkiem dla dowolnego  $n, r \leq n \leq s$ , ale nie jest nim dla  $n = r - 1, s + 1$ . Taki  $\alpha$ -szereg zawierający  $\beta$  nazwiemy *prawidłowym*.

Znowu podprzestrzeń  $\mathfrak{g}' := \sum_{n=r}^s \mathfrak{g}^{\beta+n\alpha}$  jest niezmiennicza dla operatorów  $\text{ad}_{E_\alpha}, \text{ad}_{E_{-\alpha}}, \text{ad}_H$ . Ponieważ  $H_\alpha = [E_\alpha, E_{-\alpha}]$ , mamy  $\text{Tr}(\text{ad}_{H_\alpha}|_{\mathfrak{g}'}) = 0$ . Z innej strony,  $\text{Tr}(\text{ad}_{H_\alpha}|_{\mathfrak{g}'}) = \sum_{n=r}^s (\beta + n\alpha)(H_\alpha)$  i, ponieważ  $\alpha(H_\alpha) \neq 0$ , mamy

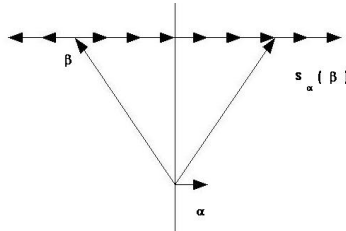
$$\frac{\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)} = - \sum_{n=r}^s n = - \frac{r+s}{2}.$$

Jasne, że każdy  $\alpha$ -szereg zawierający  $\beta$  składa się z szeregów prawidłowych. Powyższa równość pokazuje, że taki składnik może być tylko jeden.

Ad. 3.- bez dowodu.

Ad. 4. Niech  $V, (\cdot)$  będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym. Dla  $\alpha \in V^*$  odbicie prostopadłe w hiperpłaszczyźnie  $\{v \in V \mid \alpha(v) = 0\}$  jest dane wzorem  $v \mapsto v - 2 \frac{(v|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \alpha$ , tutaj  $v_\alpha$  definiujemy przez  $(v_\alpha|v) = \alpha(v), v \in V$  (*Ćwiczenie*).

Z punktu 2 mamy  $s_\alpha(H_\beta) = H_\beta - 2 \frac{\alpha(H_\beta)}{\alpha(H_\alpha)} H_\alpha = H_\beta - 2 \frac{B_{\mathfrak{g}}(H_\alpha, H_\beta)}{B_{\mathfrak{g}}(H_\alpha, H_\alpha)} H_\alpha = H_\beta - 2 \frac{\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)} H_\alpha = H_\beta + (p+q)H_\alpha$ . Stad wynika, że  $p \leq p+q \leq q$ , czyli  $s_\alpha(H_\beta)$  jest wektorem pierwiastkowym. Istotnie, niech  $\beta$  leży po innej stronie hiperpłaszczyzny  $\alpha^\perp$  niż  $\alpha$  (utożsamiamy  $\mathfrak{h}$  i  $\mathfrak{h}^*$  za pomocą  $B_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$ ). Wtedy  $p \leq 0, q \geq 0$  i  $p \leq p+q \leq q$  (zob. rysunek). Podobnie rozumujemy, jeśli  $\beta$  i  $\alpha$  leżą po tej samej stronie.



□

# 11 Istotność układu pierwiastków. Formy rzeczywiste zespolonych półprostych algebr Liego

Literatura dodatkowa: [Hel00]

**Część rzeczywista podalgebry Cartana:**

LEMAT Niech  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} := \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R}H_{\alpha}$ . Wtedy

1. Ograniczenie  $b_{\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}}$  formy Killinga  $B_{\mathfrak{g}}$  do  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \times \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  jest dodatnio określoną formą rzeczywistą.
2.  $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} + i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  (suma prosta).

*Dowód:* Ad. 1. Dla  $H, H' \in \mathfrak{h}$  mamy  $B_{\mathfrak{g}}(H, H') = \text{Tr}(\text{ad}_H \circ \text{ad}_{H'}) = \sum_{\beta \in \Delta} \beta(H)\beta(H')$  (ostatnia równość obowiązuje ponieważ w bazie  $\mathfrak{g}$  złożonej z dowolnej bazy  $\mathfrak{h}$  oraz wektorów  $E_{\beta}, \beta \in \Delta$ , macierz operatora  $\text{ad}_H$  ma postać blokową postaci  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$ , gdzie  $D$  jest macierzą diagonalną o wyrazach  $\beta(H)$  na diagonalu (wartości własne odpowiadające wektorom własnym  $E_{\beta}$ ). Z lematu w Wykładzie 10 wiemy, że  $-2\frac{\beta(H_{\alpha})}{\alpha(H_{\alpha})} = p(\beta, \alpha) + q(\beta, \alpha)$ , gdzie  $p(\beta, \alpha), q(\beta, \alpha) \in \mathbb{Z}$ . Stąd

$$\alpha(H_{\alpha}) = B_{\mathfrak{g}}(H_{\alpha}, H_{\alpha}) = \sum_{\beta \in \Delta} \beta^2(H_{\alpha}) = \frac{1}{4} \sum_{\beta \in \Delta} \alpha^2(H_{\alpha})(p(\beta, \alpha) + q(\beta, \alpha))^2.$$

Dalej obliczamy  $\alpha(H_{\alpha})$  (o którym już wiemy, że jest  $\neq 0$ ) i widzimy, że  $\alpha(H_{\alpha})$  jest rzeczywiste (i dodatnie), co daje też rzeczywistość  $\beta(H_{\alpha})$  (znowu korzystamy ze wzoru z lematu). W konsekwencji mamy rzeczywistość  $\beta(H)$  dla  $H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  (bo każde takie  $H$  jest kombinacją liniową  $H_{\alpha}$  o współczynnikach rzeczywistych), oraz  $B_{\mathfrak{g}}(H, H')$  dla  $H, H' \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ .

Żeby udowodnić niezdegenerowanie  $B_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \times \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}}$  zauważmy, że ma miejsce implikacja  $\alpha(H) = 0 \forall \alpha \in \Delta \implies H = 0$ . Istotnie, niech  $\alpha(H) = 0$  dla wszystkich  $\alpha \in \Delta$ . Z rozkładu  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}^{\alpha}$  wynika wtedy, że  $[H, X] = 0$  dla wszystkich  $X \in \mathfrak{g}$ , czyli  $H$  jest elementem centrum, które jest trywialne.

Niech teraz  $H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  będzie takie, że  $B_{\mathfrak{h}}(H, H') = 0$  dla wszystkich  $H' \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ . Wtedy w szczególności  $B_{\mathfrak{h}}(H, H) = \sum_{\beta \in \Delta} \beta^2(H) = 0$  skąd  $\beta(H) = 0$  dla dowolnego  $\beta \in \Delta$ .

Ad. 2. Bez dowodu.  $\square$

**Istotność układu pierwiastków:**

TWIERDZENIE Niech  $\mathfrak{g}$  i  $\mathfrak{g}'$  będą dwiema półprostymi algebrami Liego (nad  $\mathbb{C}$ ), a  $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$  ich podalgebrami Cartana. Niech  $\Delta, \Delta'$  będą odpowiednimi układami pierwiastków niezerowych i niech  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} := \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R}H_{\alpha}, \mathfrak{h}'_{\mathbb{R}} := \sum_{\alpha' \in \Delta'} \mathbb{R}H_{\alpha'}$  (możemy patrzeć na  $\Delta, \Delta'$  jako na podzbiory w przestrzeniach dualnych  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*, (\mathfrak{h}'_{\mathbb{R}})^*$ , ponieważ  $\beta(H), \beta'(H') \in \mathbb{R}$  dla  $\beta \in \Delta, \beta' \in \Delta', H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}, H' \in \mathfrak{h}'_{\mathbb{R}}$ ).

Założmy, że istnieje  $\mathbb{R}$ -liniowy izomorfizm  $\phi : \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathfrak{h}'_{\mathbb{R}}$  taki, że  $\phi^*(\Delta') = \Delta$ , gdzie  $\phi^* : (\mathfrak{h}'_{\mathbb{R}})^* \rightarrow \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$  jest odwzorowaniem dualnym. Wtedy istnieje  $\mathbb{C}$ -izomorfizm algebr Liego  $\Phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$  taki, że  $\Phi|_{\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}} = \phi$ .

*Idea dowodu:* Najpierw wybiera się wektory  $E_{\alpha} \in \mathfrak{g}^{\alpha}, \alpha \in \Delta$ , tak, żeby  $B_{\mathfrak{g}}(E_{\alpha}, E_{-\alpha}) = 1$  (można to zrobić, ponieważ  $B_{\mathfrak{g}}(X_{\alpha}, X_{-\alpha}) \neq 0$  dla niezerowych  $X_{\alpha} \in \mathfrak{g}^{\alpha}, X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ ). Dla każdej pary  $\alpha, \beta \in \Delta$  takiej, że  $\alpha + \beta \in \Delta$  istnieje niezerowe  $N_{\alpha, \beta} \in \mathbb{C}$  takie, że  $[E_{\alpha}, E_{\beta}] = N_{\alpha, \beta}E_{\alpha+\beta}$ .

Dalej konstruuje się wektory  $E_{\alpha'} \in \mathfrak{g}^{\alpha'}$ ,  $\alpha' \in \Delta'$ , takie, że: 1)  $B_{\mathfrak{g}'}(E_{\alpha'}, E_{-\alpha'}) = 1$ ; 2)  $[E_{\alpha'}, E_{\beta'}] = N_{\alpha, \beta} E_{\alpha' + \beta'}$ , gdzie  $\alpha = \phi^*(\alpha')$ ,  $\beta = \phi^*(\beta')$ . Stosuje się do tego własności współczynników  $N_{\alpha, \beta}$  wynikające z tożsamości Jacobiego oraz specjalną indukcję.

Odwzorowanie przedłużające  $\phi$  wzorem  $\Phi : E_{\alpha} \mapsto E_{\alpha'}$  będzie szukanym izomorfizmem algebr Liego. Istotnie,  $\Phi[H, E_{\alpha}] = \Phi\alpha(H)E_{\alpha} = \alpha(H)E_{\alpha'} = \alpha'(\phi H)E_{\alpha'} = [\Phi H, \Phi E_{\alpha}]$ . Dla  $\alpha, \beta \in \Delta$  takich, że  $\alpha + \beta \in \Delta$  mamy  $\Phi[E_{\alpha}, E_{\beta}] = \Phi N_{\alpha, \beta} E_{\alpha + \beta} = N_{\alpha, \beta} E_{\alpha' + \beta'} = [E_{\alpha'}, E_{\beta'}] = [\Phi E_{\alpha}, \Phi E_{\beta}]$ . Na koniec  $\Phi[E_{\alpha}, E_{-\alpha}] = \Phi B_{\mathfrak{g}}(E_{\alpha}, E_{-\alpha})H_{\alpha} = \Phi H_{\alpha} = H_{\alpha'} = [E_{\alpha'}, E_{-\alpha'}] = [\Phi E_{\alpha}, \Phi E_{-\alpha}]$ .  $\square$

**Kompleksyfikacja, urzeczywistnienie i formy rzeczywiste algebr Liego:** Niech  $(\mathfrak{g}, [,])$  będzie algebrą Liego nad  $\mathbb{R}$ . Wtedy nawias  $[,]$  jednoznacznie przedłuża się do zespolonego nawiasu Liego na kompleksyfikacji  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} = \mathfrak{g} + i\mathfrak{g}$  przestrzeni  $\mathfrak{g}$  wzorem  $[X' + iX'', Y' + iY''] = [X', Y'] - [X'', Y''] + i([X', Y''] + [X'', Y'])$ . Przestrzeń  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  z tym nowym nawiasem nazywamy *kompleksyfikacją* algebry Liego  $(\mathfrak{g}, [,])$ .

**PRZYKŁAD:** Algebry Liego  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ ,  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ ,  $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ ,  $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$  są kompleksyfikacjami odpowiednich rzeczywistych algebr Liego  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ ,  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ ,  $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ ,  $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ . Istotnie, jeśli  $X = X' + iX''$ ,  $Y = Y' + iY'' \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ , nawias  $[X, Y]$  spełnia powyższy wzór.

*Urzeczywistnieniem*  $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$  zespolonej algebry Liego  $\mathfrak{g}$  nazywamy tę algebrę rozumianą jako algebrę nad  $\mathbb{R}$ .

**LEMAT** 1. Niech  $\mathfrak{g}$  będzie algebrą Liego nad  $\mathbb{R}$ . Wtedy  $B_{\mathfrak{g}}(X, Y) = B_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(X, Y)$  dla  $X, Y \in \mathfrak{g}$ .

2. Niech  $\mathfrak{h}$  będzie algebrą Liego nad  $\mathbb{C}$ . Wtedy  $B_{\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}}(X, Y) = 2 \operatorname{Re} B_{\mathfrak{h}}(X, Y)$  dla  $X, Y \in \mathfrak{h}$ .

*Dowód:* Punkt pierwszy jest oczywisty. Żeby dowieść drugi, zauważmy, że jeśli  $L : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$  jest operatorem  $\mathbb{C}$ -liniowym, a  $P+iQ := [L]_e$  jest macierzą tego operatora w pewnej bazie  $e = (e_1, \dots, e_n)$ , to macierz operatora  $L_{\mathbb{R}}$  (czyli operatora rozumianego jako operator  $\mathbb{R}$ -liniowy) w bazie  $(e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n)$  jest równa

$$\begin{bmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{bmatrix}.$$

Stąd  $\operatorname{Tr} L_{\mathbb{R}} = 2 \operatorname{Re} \operatorname{Tr} L$ .  $\square$

*Ćwiczenie:* Wywnioskuj z lematu, że: 1)  $\mathfrak{g}$  jest półprosta wtedy i tylko wtedy gdy  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  jest półprosta; 2)  $\mathfrak{h}$  jest półprosta wtedy i tylko wtedy gdy  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  jest półprosta.

*Formą rzeczywistą* zespolonej algebry Liego  $\mathfrak{g}$  nazywamy taką rzeczywistą algebrę Liego  $\mathfrak{h}$ , że  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ . Równoważnie, forma rzeczywista jest podalgebrą algebry  $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$  taką, że  $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{h} + i\mathfrak{h}$  (suma prosta przestrzeni wektorowych).

Rozważmy odwzorowanie  $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  dane wzorem  $X' + iX'' \mapsto X' - iX''$ ,  $X', X'' \in \mathfrak{h}$ . Ma ono następujące własności: 1)  $\sigma^2 = \operatorname{Id}$ ; 2) jest antyliniowe; 3)  $\sigma[X, Y] = [\sigma X, \sigma Y]$ ,  $X, Y \in \mathfrak{g}$ .

Odwrotnie, każde takie odwzorowanie zadaje pewną formę rzeczywistą algebry Liego  $\mathfrak{g}$ . Istotnie, niech  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^{\sigma} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma(X) = X\}$ . *Ćwiczenie:* Udowodnij, że  $\mathfrak{h}$  jest podalgebrą w  $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$  oraz, że  $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{h} + i\mathfrak{h}$ .

Jedna algebra zespolona może mieć kilka *nie izomorficznych* form rzeczywistych.

**TWIERDZENIE** Każda półprosta algebra Liego  $\mathfrak{g}$  nad  $\mathbb{C}$  ma zwartą formę rzeczywistą.

*Dowód:* Wybierzmy  $E_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$  tak, żeby  $B_{\mathfrak{g}}(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1$ . Wtedy mamy:

$$B(E_\alpha - E_{-\alpha}, E_\alpha - E_{-\alpha}) = -2, B(i(E_\alpha + E_{-\alpha}), i(E_\alpha + E_{-\alpha})) = -2$$

$$B(E_\alpha - E_{-\alpha}, i(E_\alpha + E_{-\alpha})) = 0, B(iH_\alpha, iH_\alpha) < 0.$$

Ostatnia nierówność wynika z lematu o formie rzeczywistej podalgebry Cartana. Niech

$$\mathfrak{g}_{zw} := \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R}(iH_\alpha) + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R}(E_\alpha - E_{-\alpha}) + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R}i(E_\alpha + E_{-\alpha}).$$

Żeby pokazać, że jest to podalgebra w  $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$  wystarczy dowieść, że jeśli  $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta$ , to współczynniki  $N_{\alpha, \beta}$  określone przez  $[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha, \beta} E_{\alpha + \beta}$  są rzeczywiste. Przyjmujemy to bez dowodu.

Lemat o formie Killinga formy rzeczywistej pokazuje, że  $B_{\mathfrak{g}_{zw}}(X, Y) = B_{\mathfrak{g}}(X, Y)$ ,  $X, Y \in \mathfrak{h}$ . Ostatnia forma jest ujemnie określona, co wynika z powyższych (nie)równości.  $\square$

PRZYKŁAD: Niech  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ , wtedy  $\mathfrak{g}_{zw} = \sum_{j=1}^n \mathbb{R}(i(E_{j,j} - E_{j+1,j+1})) + \sum_{j \neq k} \mathbb{R}(E_{jk} - E_{kj}) + \sum_{j \neq k} \mathbb{R}i(E_{jk} + E_{kj})$ . Jeśli  $A \in \mathfrak{g}_{zw}$ , to  $-\bar{A}^T = A$ , czyli  $\sigma(A) = -\bar{A}^T$ . Macierze o własności  $\sigma(A) = A$  nazywamy *skośnie unitarnymi*. Algebra Liego  $\mathfrak{g}_{zw}$  oznacza się  $\mathfrak{su}(n)$  i jest algebrą Liego specjalnej unitarnej grupy  $SU(n) = \{a \in SL(n, \mathbb{C}) \mid a\bar{a}^T = I\}$ .

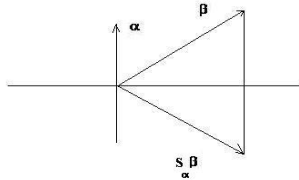
Na zakończenie zauważmy, że odwzorowanie  $\sigma$  odpowiadające formie rzeczywistej  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  algebry Liego  $\mathfrak{g}$  jest dane wzorem  $\sigma(A) = \bar{A}$  oraz, że formy  $\mathfrak{su}(n)$  i  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  nie są izomorficzne (jedna jest zwarta, druga nie).



## 12 Abstrakcyjne układy pierwiastków

Literatura dodatkowa: [Hel00]

**Odbicie euklidesowej przestrzeni wektorowej  $(V, (\cdot))$  wzdłuż wektora  $\alpha \in V, \alpha \neq 0$ :** Jest to przekształcenie ortogonalne zadane wzorem  $s_\alpha \beta = \beta - a_{\beta, \alpha} \alpha$ , gdzie  $a_{\beta, \alpha} = 2(\beta | \alpha) / (\alpha | \alpha)$ .



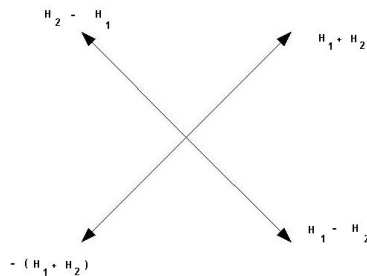
**Układ pierwiastków w  $(V, (\cdot))$ :** Jest to skończony zbiór  $R \subset V$  o własnościach:

1.  $R$  generuje  $V$ ;
2. dla każdego  $\alpha \in R$  odbicie  $s_\alpha$  przestrzeni  $V$  wzdłuż  $\alpha$  zachowuje  $R$ ;
3. jedyne pierwiastki proporcjonalne do  $\alpha \in R$  to  $\alpha, 0, -\alpha$ ;
4. dla wszystkich  $\alpha, \beta \in R$  liczby  $a_{\beta, \alpha}$  określone wzorem  $s_\alpha \beta = \beta - a_{\beta, \alpha} \alpha$  są całkowite.

Mówimy, że układ pierwiastków  $R \subset V$  jest *nieprzywiedlny*, jeśli nie istnieje rozkładu  $V = V_1 \oplus V_2$  w ortogonalną sumę prostą taką, że  $R_1 := R \cap V_1$  oraz  $R_2 := R \cap V_2$  są układami pierwiastków w  $V_1, V_2$  odpowiednio i  $R = R_1 \cup R_2$ .

**PRZYKŁAD:** Zbiór wektorów pierwiastkowych  $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) := \{H_\alpha \mid \alpha \in \Delta \cup \{0\}\} \subset \mathfrak{h}_\mathbb{R}$  półprostej zespolonej algebry Liego względem podalgebry Cartana  $\mathfrak{h}$  jest układem pierwiastków. Istotnie, w lemacie z Wykładu 10 pokazaliśmy niezmienniczość  $R \subset \mathfrak{h}$  względem odbić  $s_\alpha$  w płaszczyznach  $\alpha = 0, \alpha \in \Delta$ . Odbicia te zadawane są wzorem  $s_\alpha(H) = H - 2 \frac{\alpha(H)}{\alpha(H_\alpha)} H_\alpha$ , gdzie  $-2 \frac{\alpha(H)}{\alpha(H_\alpha)} = -2 \frac{B_{\mathfrak{g}}(H_\alpha, H_\beta)}{B_{\mathfrak{g}}(H_\alpha, H_\alpha)} = p + q$  jest liczbą całkowitą. Spełnienie warunku 3. wynika z tegoż lematu.

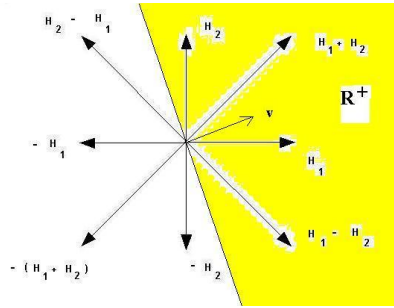
Układ pierwiastków algebry  $\mathfrak{d}_2$



nie jest nieprzywiedlny. Układy w pozostałych przykładach ( $\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n, \mathbf{c}_n$  oraz  $\mathbf{d}_n, n > 2$ ) są.

**Pierwiastki dodatnie i proste:** Wybierzmy element  $v \in V, v \neq 0$  taki, że  $v^\perp \cap R = \{0\}$  (tutaj  $v^\perp$  jest hiperpłaszczyzną prostopadłą do  $v$ ; możemy wybrać takie  $v$ , bo  $R$  jest skończony). Zbiór pierwiastków leżących po tej samej stronie od  $v^\perp$  co i  $v$  oznaczymy przez  $R^+$ . Będziemy je nazywać pierwiastkami *dodatnimi*. Pierwiastki ze zbioru  $R^- := R \setminus (R^+ \cup \{0\})$  nazywamy *ujemnymi*. Mówimy, że  $\alpha \in R^+$  jest pierwiastkiem *prostym*, jeśli on nie może być zapisany w postaci  $\alpha = \beta + \gamma, \beta, \gamma \in R^+$ .

PRZYKŁAD:



LEMAT Niech  $\alpha, \beta$  będą pierwiastkami prostymi,  $\alpha \neq \beta$ . Wtedy  $(\alpha|\beta) \leq 0$ .

*Dowód:* Najpierw zauważmy, że  $\gamma := \beta - \alpha \notin R$ . Istotnie, gdyby  $\gamma \in R^+$ , to  $\beta = \alpha + \gamma$  byłby sumą pierwiastków dodatnich, co jest sprzeczne z założeniem prostoty  $\alpha$ . Podobnie, gdyby  $\gamma \in R^-$ , to  $\alpha = \beta + (-\gamma)$  byłby sumą pierwiastków dodatnich.

Stąd wnioskujemy, że dla  $\alpha$ -szeregu  $\{\beta + n\alpha \mid p \leq n \leq q\}$ , zawierającego  $\beta$  mamy  $p = 0, q \geq 0$  (pojęcie  $\alpha$ -szeregu dla abstrakcyjnych układów pierwiastków określa się analogicznie, jak dla układów  $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  i ma analogiczne własności; w szczególności  $n$  przebiega *wszystkie* liczby całkowite pomiędzy  $p$  i  $q$ , oraz  $-2(\beta|\alpha)/(\alpha|\alpha) = p + q$ ). Ostatecznie mamy  $(\beta|\alpha) = -(1/2)(\alpha|\alpha)(p + q) \leq 0$ .  $\square$

**Baza układu pierwiastków  $R$ :** Jest to podzbiór  $B \subset R$  o własnościach: 1)  $B$  jest bazą  $V$ ; 2) każdy pierwiastek  $\beta \in R$  może być zapisany w postaci  $\beta = \sum_{\alpha \in B} n_\alpha \alpha$ , gdzie  $n_\alpha$  są liczby całkowite tego samego znaku.

LEMAT Każdy układ pierwiastków  $R$  posiada bazę.

*Dowód:* Niech  $B$  będzie zbiorem pierwiastków prostych. Wtedy jest to układ liniowo niezależny. Istotnie, załóżmy przeciwne. Wtedy istnieją  $x_i \neq 0, i \in I$ , takie, że  $\sum x_i \alpha_i = 0$  dla pewnych  $\alpha_i \in B$ . Podzielmy te współczynniki na dodatnie i ujemne:  $I = I' \cup I'', x_i > 0, i \in I', x_j < 0, j \in I''$ . Dla  $\gamma := \sum_{i \in I'} x_i \alpha_i$  mamy  $0 < (\gamma|\gamma) = \sum_{i \in I', j \in I''} x_i (-x_j) (\alpha_i|\alpha_j)$ . Ostatnie wyrażenie jest ujemne według powyższego lematu, co daje sprzeczność.

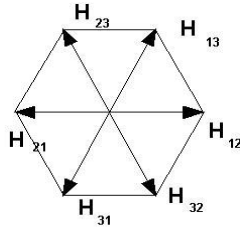
Teraz niech  $\gamma \in R^+$ . Jeśli  $\gamma$  nie jest prosty, możemy go rozłożyć:  $\gamma = \alpha + \beta, \alpha, \beta \in R^+$ . Działając indukcyjnie, dojdziemy do rozkładu  $\gamma = \sum_{\alpha \in B} n_\alpha \alpha, n_\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Jeśli  $\gamma \in R^-$ , to  $-\gamma \in R^+$  i powtarzamy rozumowanie.

Jasne jest, że, ponieważ  $R$  generuje  $V$ , to i  $B$  też.  $\square$

**Macierz Cartana układu pierwiastków:** Niech  $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$  będzie dowolną bazą  $R$ . *Macierzą Cartana* układu pierwiastków  $R$  związaną z  $B$  nazywamy macierz  $C$  o wyrazach  $a_{ij} := a_{\alpha_i, \alpha_j}$ .

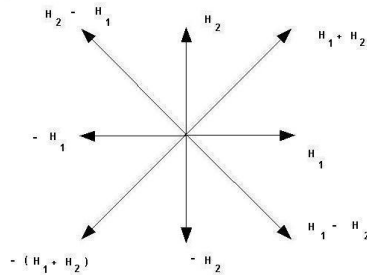
PRZYKŁAD: ( $\mathbf{a}_2$ ) Dla bazy  $B = \{\alpha_1 = H_{12}, \alpha_2 = H_{23}\}$  mamy macierz

$$C = 2 \begin{bmatrix} (\alpha_1|\alpha_1)/(\alpha_1|\alpha_1) & (\alpha_1|\alpha_2)/(\alpha_2|\alpha_2) \\ (\alpha_2|\alpha_1)/(\alpha_1|\alpha_1) & (\alpha_2|\alpha_2)/(\alpha_2|\alpha_2) \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{\|\alpha_1\| \cdot \|\alpha_2\| \cos(2\pi/3)}{\|\alpha_2\|^2} \\ \frac{\|\alpha_2\| \cdot \|\alpha_1\| \cos(2\pi/3)}{\|\alpha_1\|^2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$



PRZYKŁAD: ( $\mathbf{b}_2$ ) Dla bazy  $B = \{\alpha_1 = H_1 - H_2, \alpha_2 = H_2\}$  mamy macierz

$$C = 2 \begin{bmatrix} (\alpha_1|\alpha_1)/(\alpha_1|\alpha_1) & (\alpha_1|\alpha_2)/(\alpha_2|\alpha_2) \\ (\alpha_2|\alpha_1)/(\alpha_1|\alpha_1) & (\alpha_2|\alpha_2)/(\alpha_2|\alpha_2) \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{\|\alpha_1\| \cdot \|\alpha_2\| \cos(3\pi/4)}{\|\alpha_2\|^2} \\ \frac{\|\alpha_2\| \cdot \|\alpha_1\| \cos(3\pi/4)}{\|\alpha_1\|^2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$



**Jak  $C$  i  $B$  wyznaczają  $R$ :** Niech  $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$  oraz  $C := \|a_{ij}\|$ . Każdy pierwiastek  $\beta \in \mathbb{R}^+$  ma postać  $\beta = \sum_i n_i \alpha_i$ . Liczbę  $\sum_i n_i$  nazywamy wysokością pierwiastka  $\beta$ . W szczególności pierwiastki wysokości 1 są elementami bazy  $B$ .

Według  $B$  i  $C$  budujemy wszystkie  $\alpha_i$ -szeregi zawierające  $\alpha_j$ :

$$\alpha_j, \alpha_j + \alpha_i, \dots, \alpha_j + (-a_{ji})\alpha_i$$

(z dowodu pierwszego z powyższych lematów wiemy, że  $\alpha_j - \alpha_i$  nie jest pierwiastkiem, więc  $p = 0, q = a_{ji}$ ). W szczególności, otrzymujemy wszystkie pierwiastki wysokości 2:  $\alpha = \alpha_j + \alpha_i$ . Ponadto z  $C$  odczytujemy wartość  $a_{\alpha, \alpha_k} = 2(\alpha|\alpha_k)/(\alpha_k|\alpha_k) = a_{jk} + a_{ik}$ . W rezultacie mamy wszystkie  $\alpha_k$ -szeregi zawierające  $\alpha$  i zawierające się w  $R^+$ :  $\alpha + p\alpha_k, \dots, \alpha + q\alpha_k$ , gdzie  $p = 0$  (jeśli  $k \notin \{i, j\}$ ) lub  $p = -1$  (jeśli  $k \in \{i, j\}$ ), a  $q$  wyznaczamy z równości  $p + q = -a_{\alpha, \alpha_k}$ . W ten sposób otrzymujemy wszystkie pierwiastki wysokości 3.

Iterując ten proces otrzymamy pierwiastki wszystkich wysokości. Trzeba tylko pokazać, że w układach pierwiastków „przyjmują się” wszystkie wysokości pomiędzy 1 a maksymalną. To przyjmujemy bez dowodu.

PRZYKŁAD: Niech  $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ . Wtedy mamy następujące  $\alpha_i$ -szeregi zawierające  $\alpha_i$ : 1)

$\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2$ ; 2)  $\alpha_2, \alpha_2 + \alpha_1$ ; 3)  $\alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3$ ; 4)  $\alpha_3, \alpha_3 + \alpha_2, \alpha_3 + 2\alpha_2$ .

Otrzymaliśmy 2 pierwiastki wysokości 2. Rozważmy  $\alpha := \alpha_1 + \alpha_2$ , wtedy  $\alpha_3$ -szereg zawierający  $\alpha$  to  $\alpha, \alpha + \alpha_3$ , ( $p = 0, q = -a_{\alpha, \alpha_3} = -(a_{13} + a_{23}) = 1$ ). Dla  $\alpha = \alpha_2 + \alpha_3$  mamy  $\alpha_1$ -szereg  $\alpha, \alpha + \alpha_1$  ( $q = -(a_{21} + a_{31}) = 1$ ).

Otrzymaliśmy 2 pierwiastki wysokości 3. Niech  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ . Wtedy  $\alpha_2$ -szereg zawierający  $\alpha$  to  $\alpha, \alpha + \alpha_2$  (bo  $p = 0, q = -a_{\alpha, \alpha_2} - q = -(a_{12} + a_{22} + a_{32}) = 1$ ).

Niech  $\alpha = \alpha_3 + 2\alpha_2$ . Wtedy  $\alpha_1$ -szereg zawierający  $\alpha$  to  $\alpha, \alpha + \alpha_1, \alpha + 2\alpha_1$  (bo  $p = 0, q = -a_{\alpha, \alpha_1} - p = -(a_{31} + 2a_{21}) = 2$ ).

Ostatecznie, otrzymaliśmy następujący układ pierwiastków dodatnich:  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 + 2\alpha_2, +\alpha_3$ . Układ ten odpowiada algebrze  $\mathfrak{c}_3$ : wystarczy wziąć  $\alpha_1 = H_1 - H_2, \alpha_2 = H_2 - H_3, \alpha_3 = 2H_3$ .

Następne twierdzenie pokazuje, że rekonstruowanie układu  $R$  z  $B$  i  $C$  jest jednoznaczne.

**TWIERDZENIE** Niech  $R, R' \subset V'$  będą układami pierwiastków z bazami  $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}, B' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_l\}$ . Oznaczmy  $a_{ij} := a_{\alpha'_i, \alpha'_j}, a_{i'j'} := a_{\alpha'_i, \alpha'_j}$ . Jeśli  $a_{ij} = a_{i'j'}$ , to odwzorowanie  $\alpha_i \mapsto \alpha_{i'}$  przedłużone według liniowości na całe  $V$  (które oznaczamy przez  $\phi$ ) odwzorowuje bijektywnie  $V$  na  $V'$  oraz  $R$  na  $R'$ .

*Idea dowodu:* Grupę Weyla układu pierwiastków  $R$  definiujemy jako podgrupę grupy izometrii przestrzeni  $V$  generowaną przez odbicia  $s_\alpha, \alpha \in R$ , i oznaczamy przez  $W(R)$ .

Dalej dowodzimy, że grupa Weyla tak naprawdę jest generowana przez „odbicia proste”  $s_\alpha, \alpha \in B$ , oraz że  $W(R)B = R$ .

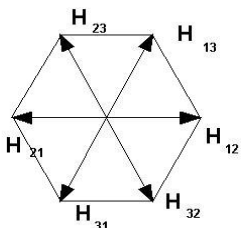
Warunek  $a_{ij} = a_{i'j'}$  następnie implikuje, że  $\phi$  „komutuje z odbiciami prostymi”:  $\phi \circ s_\alpha = s_{\alpha'} \circ \phi, \alpha \in B$ , oraz ze wszystkimi:  $\phi \circ s_\alpha = s_{\phi(\alpha)} \circ \phi, \alpha \in R$ . To daje  $\phi(R) = \phi(W(R)B) = W(R')\phi(B) = W(R')B' = R'$ .  $\square$

# 13 O klasyfikacji półprostych algebr Liego

Literatura dodatkowa: [Hel00]

**Graf Coxetera i diagram Dynkina układu pierwiastków:** Niech  $C = ||c_{ij}||$  będzie macierzą Cartana układu pierwiastków  $R$  odpowiadającą bazie  $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ . *Grafem Coxetera* układu  $R$  nazywamy graf o  $l$  wierzchołkach, przy czym wierzchołki  $i$ -ty i  $j$ -ty połączone są za pomocą  $a_{ij}a_{ji}$  nieprzecinających się odcinków. Jeśli nad  $i$ -tym wierzchołkiem dopiszemy jeszcze wielokrotność  $(\alpha_i|\alpha_i)$  otrzymamy *diagram Dynkina*.

PRZYKŁAD:  $(\mathfrak{a}_2)$



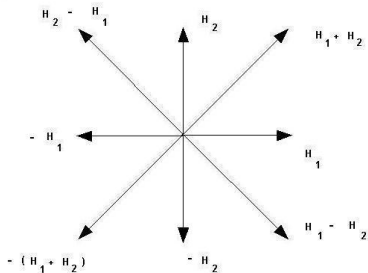
Dla bazy  $B = \{\alpha_1 = H_{12}, \alpha_2 = H_{23}\}$  i macierzy

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

mamy



PRZYKŁAD:  $(\mathfrak{b}_2)$



Dla bazy  $B = \{\alpha_1 = H_1 - H_2, \alpha_2 = H_2\}$  i macierzy

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

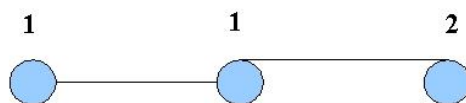
mamy



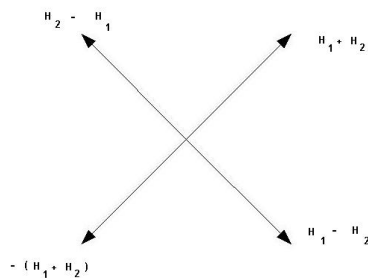
PRZYKŁAD: ( $\mathfrak{c}_3$ ) Dla bazy  $\alpha_1 = H_1 - H_2, \alpha_2 = H_2 - H_3, \alpha_3 = 2H_3$  i macierzy

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

mamy



PRZYKŁAD: ( $\mathfrak{d}_2$ )



Dla bazy  $\alpha_1 = H_1 + H_2, \alpha_2 = H_1 - H_2$  i macierzy

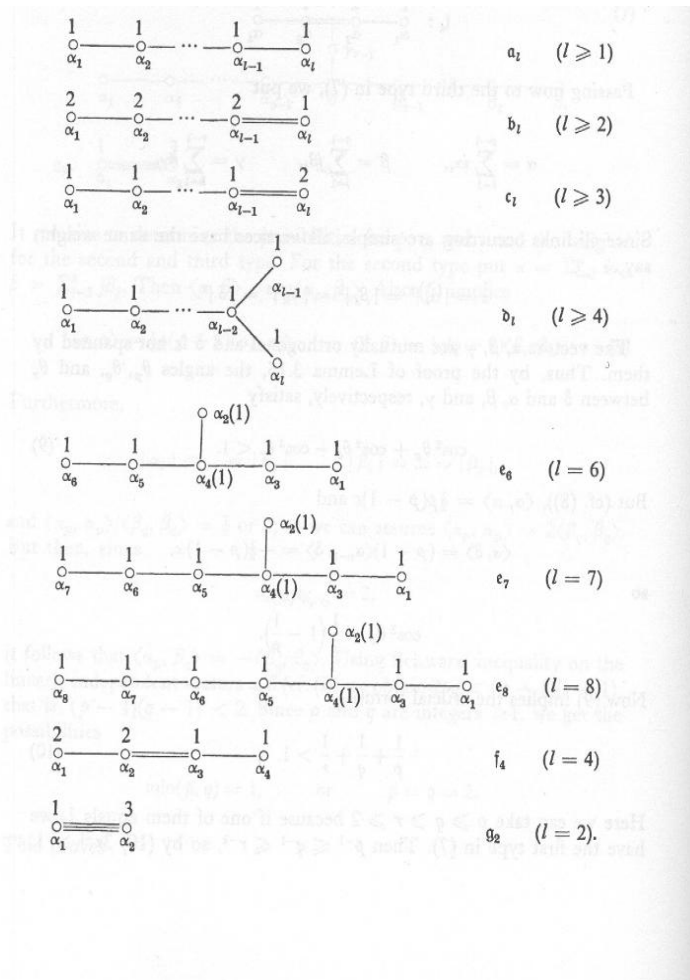
$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mamy



W ostatnim przykładzie otrzymaliśmy niespójny graf, co odzwierciedla przywiedlność odpowiedniego układu pierwiastków. W ogólności, nieprzywiedlnym układom pierwiastków odpowiadają spójne grafy Coxetera.

**Klasyfikacja diagramów Dynkina:** Poniżej przeliczone są wszystkie spójne diagramy Dynkina (listę tę przyjmujemy bez dowodu). Ponieważ diagram Dynkina w sposób jednoznaczny definiuje odpowiednią macierz Cartana, w ten sposób otrzymujemy klasyfikację nieprzywiedlnych układów pierwiastków.

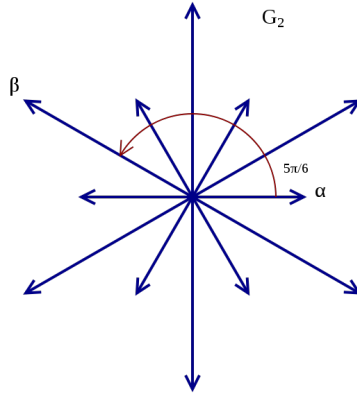


(Ilustracja z książki [Hel00].) Na liście tej znajdujemy 4 nieskończone serie diagramów odpowiadające układom pierwiastków, z którymi już jesteśmy zaznajomieni oraz pięć innych diagramów odpowiadających tzw. wyjątkowym układom pierwiastków. Wśród ostatnich przykładowo rozpatrzmy diagram

$\mathfrak{g}_2$ . Odpowiednia macierz Cartana ma postać

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

a układ pierwiastków wygląda następująco:



(ilustracja z Wikipedii).

### Macierz Cartana a generatory kanoniczne półprostej algebry Liego:

**TWIERDZENIE** Niech  $\mathfrak{g}$  będzie półprostą algebrą Liego nad  $\mathbb{C}$ ,  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  jej podalgebrą Cartana, a  $C = ||a_{ij}||$  macierzą Cartana odpowiadającą pewnej bazie  $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$  układu pierwiastków  $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ . Wtedy istnieją elementy  $X_i, Y_i, H_i \in \mathfrak{g}, i = 1, \dots, l$ , o własnościach:

1.  $[H_i, H_j] = 0$ ;
2.  $[X_i, Y_i] = H_i$ ;
3.  $[X_i, Y_j] = 0$ , jeśli  $i \neq j$ ;
4.  $[H_i, X_j] = a_{ji}X_j, [H_i, Y_j] = -a_{ij}Y_j$ ;
5.  $(\text{ad}_{X_i})^{1-a_{ij}}X_j = 0, i \neq j$ ;
6.  $(\text{ad}_{Y_i})^{1-a_{ij}}Y_j = 0, i \neq j$ ;
7. elementy  $X_i, Y_i, H_i$  generują  $\mathfrak{g}$  (czyli każdy element z  $\mathfrak{g}$  jest kombinacją liniową wielokrotnych nawiasów tych elementów).

*Dowód:* Przypomnijmy, że dla  $\alpha, \beta \in \Delta$  mamy

$$[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] = \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}, \text{ jeśli } \alpha + \beta \in \Delta \cup \{0\} \quad (4)$$

(lub = 0, w przeciwnym wypadku). Niech  $H_i := (2/(\alpha_i|\alpha_i))H_{\alpha_i}, X_i$  będzie dowolnym niezerowym wektorem z  $\mathfrak{g}^{\alpha_i}$ , a  $Y_i \in \mathfrak{g}^{-\alpha_i}$  dobierzemy tak, żeby  $B_{\mathfrak{g}}(X_i, Y_i) = (2/(\alpha_i|\alpha_i))$ . Wtedy relacje 1,2 są oczywiste, relacja 3 wynika z faktu, że  $\alpha_i - \alpha_j$  nie jest pierwiastkiem (zob. dowód jednego z lematów w Wykładzie 12). Relacje 4 wynikają z tego, że  $[H, X_j] = \alpha_j(H)X_j$  dla  $H \in \mathfrak{h}$  oraz



$\alpha_j(H_i) = (2/(\alpha_i|\alpha_i))(\alpha_j|\alpha_i) = a_{ji}$ . Relacje 5 i 6 są wnioskiem faktu, że  $\alpha_i$  szereg zawierający  $\alpha_j$  ma postać  $\alpha_j, \alpha_j + \alpha_i, \dots, \alpha_j - a_{ji}\alpha_i$ , czyli  $\alpha_j + (1 - a_{ji})\alpha_i$  nie jest pierwiastkiem. Ostatni punkt wynika z tego, że  $H_i$  tworzą bazę  $\mathfrak{h}$  oraz z równości (4) (z uwzględnieniem faktu, że każdy pierwiastek jest kombinacją bazowych).  $\square$

### **Klasyfikacja półprostych zespolonych algebr Liego:**

**TWIERDZENIE** *Niech  $R$  będzie układem pierwiastków. Wtedy istnieje zespolona półprosta algebra Liego  $\mathfrak{g}$  oraz podalgebra Cartana  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  takie, że  $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ .*

*Idea dowodu:* Niech  $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$  będzie bazą układu  $R$ , a  $C = \|\|a_{ij}\|\|$ ,  $a_{ij} = a_{\alpha_i\alpha_j}$  odpowiednią macierzą Cartana. Dowód twierdzenia z grubsza polega na zbudowaniu algebry Liego generowanej przez elementy  $X_i, Y_i, H_i \in \mathfrak{g}, i = 1, \dots, l$ , podlegające relacjom z poprzedniego twierdzenia.  $\square$

## 14 Elementy teorii reprezentacji półprostych algebr Liego

*Literatura dodatkowa:* [FH91, KS10]

**Reprezentacja algebry Liego  $\mathfrak{g}$  w przestrzeni wektorowej  $V$ :** Jest to homomorfizm algebr Liego  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ , gdzie przestrzeń  $\text{End}(V)$  jest wyposażona w komutator. Reprezentację  $\rho$  nazywamy *nieprzywiedlną*, jeśli nie istnieje nietrywialnej (różnej od  $\{0\}$  i  $V$ ) podprzestrzeni niezmienniczej  $W \subset V$  (czyli takiej, że  $\rho(X)W \subset W$  dla każdego  $X \in \mathfrak{g}$ ).

**TWIERDZENIE** *Niech  $\mathfrak{g}$  będzie półprostą zespoloną algebrą Liego, a  $\rho$  jej dowolną skończenie wymiarową ( $\dim V < \infty$ ) reprezentacją. Wtedy  $\rho$  jest zupełnie przywiedlna, czyli dla każdej podprzestrzeni niezmienniczej  $W \subset V$  istnieje dopełniająca podprzestrzeń niezmiennicza  $W' \subset V, V = W \oplus W'$ .*

*Bez dowodu.* (Jeden ze sposobów dowodu wykorzystuje tzw. sztuczkę unitarną Weyla: korzystamy z tego, że  $\mathfrak{g}$  posiada zwartą formę rzeczywistą. Reprezentacje zwartej algebry (grupy) Liego są zupełnie przywiedlne z powodu istnienia niezmienniczego iloczynu skalarnego na  $V$ .)

Dalej rozważamy tylko *półproste* algebry Liego  $\mathfrak{g}$  nad  $\mathbb{C}$  oraz reprezentacje skończenie wymiarowe. Z twierdzenia wynika, że każda taka reprezentacja rozkłada się w sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych.

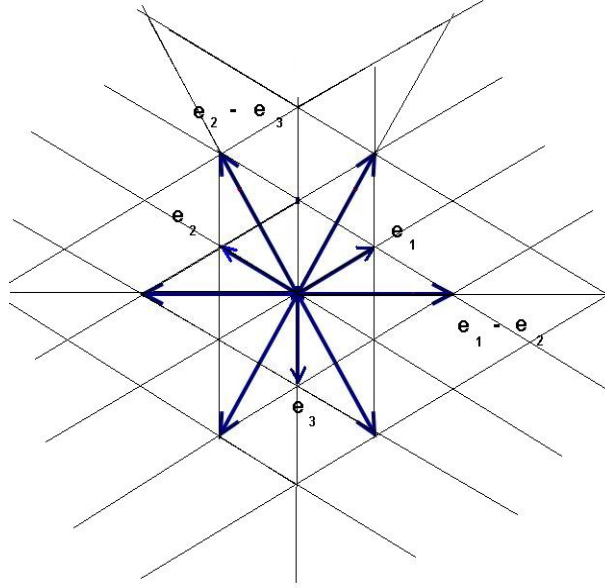
**Waga reprezentacji  $\rho$ :** Niech  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  będzie podalgebrą Cartana w  $\mathfrak{g}$ . Niech  $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ , oznaczmy

$$V^\alpha := \{v \in V \mid \rho(H)v = \alpha(H)v \ \forall H \in \mathfrak{h}\}.$$

Funkcjonał  $\alpha$  nazywamy wagą, jeśli  $V^\alpha \neq \{0\}$  (podprzestrzeń  $V^\alpha$  nazywamy *podprzestrzenią wagową* odpowiadającą  $\alpha$ ).

**PRZYKŁAD:** Już poznaliśmy reprezentację dołączoną  $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g}), \text{ad}_X Y := [X, Y]$ . Jej wagami są pierwiastki algebry Liego  $\mathfrak{g}$ , a podprzestrzenie pierwiastkowe  $\mathfrak{g}^\alpha$  są podprzestrzeniami wagowymi.

**PRZYKŁAD:** Niech  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ , a  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathbb{C}^3)$  będzie naturalną reprezentacją (macierz działa na wektor-kolumnę). Mamy  $H\mathbf{e}_i = e_i(H)\mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3$ , tutaj  $H \in \mathfrak{h}, e_i(H)$  oznacza  $i$ -ty element diagonalny macierzy  $H$  a  $\mathbf{e}_i$  są wektorami bazy kanonicznej  $\mathbb{C}^3$ . Stąd podprzestrzenie  $\langle \mathbf{e}_i \rangle$  są wagowymi odpowiadającymi wagom  $e_i$ . Poniższy rysunek przedstawia wagi wraz z pierwiastkami.



*Ćwiczenie:* 1) Udowodnij, że dla dowolnego pierwiastka  $\alpha$  oraz wagi  $\beta$  mamy  $\rho(\mathfrak{g}^\alpha)V^\beta \subset V^{\alpha+\beta}$ , jeśli  $\alpha + \beta$  jest wagą, i  $\rho(\mathfrak{g}^\alpha)V^\beta = \{0\}$  w przeciwnym przypadku. 2) Pokaż, że dla reprezentacji nieprzywiedlnej dwie dowolne wagi niezerowe różnią się o kombinację liniową pierwiastków o współczynnikach całkowitych. *Wskazówka:* dla wagi  $\alpha$  rozważ podprzestrzeń  $W = \bigoplus_{\beta \in \Lambda_R} V^{\alpha+\beta}$ , gdzie  $\Lambda_R$  jest kratką generowaną przez pierwiastki, czyli zbiorem wszystkich kombinacji liniowych pierwiastków o współczynnikach całkowitych.

**Reprezentacje  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ :** Niech  $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ ,  $H := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $E_+ := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $E_- := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Wtedy  $[H, E_\pm] = \pm 2E_\pm$ ,  $[E_+, E_-] = H$ . Rozważmy nieprzywiedlną reprezentację  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ , gdzie  $V$  jest skończenie wymiarową (nad  $\mathbb{C}$ ). Operator  $\rho(H)$  ma wektor własny:  $\rho(H)v = \lambda v$ . Ponadto  $\rho(H)\rho(E_+)v = (\rho(E_+)\rho(H) + 2\rho(E_+))v = (\lambda + 2)\rho(E_+)v$ , czyli  $\rho(E_+)v$  jest wektorem własnym dla  $\rho(H)$  odpowiadającym wartości własnej  $\lambda + 2$ . Iterując dostajemy ciąg wektorów własnych o różnych wartościach własnych  $\lambda, \lambda + 2, \lambda + 4, \dots$ , który musi się skończyć wektorem zerowym (bo  $\dim V < \infty$ ). Stąd istnieje wektor własny  $v_0$  dla  $\rho(H)$  odpowiadający wartości własnej  $\lambda_0$  o własności  $\rho(E_+)v_0 = 0$ .

Podobnie  $\rho(H)\rho(E_-)v = (\lambda - 2)\rho(E_-)v$  dla dowolnego wektora własnego o wartości własnej  $\lambda$ . W szczególności dla  $v_k := \rho(E_-)^k v_0$  mamy  $\rho(H)v_k = (\lambda_0 - 2k)v_k$ , co oznacza, że ciąg  $v_k$  musi się oberwać: istnieje  $n$  takie, że  $v_0 \neq 0, \dots, v_n \neq 0, v_{n+1} = 0$ .

**LEMAT** Dla dowolnego  $k \in \mathbb{N}$  ma miejsce równość

$$\rho(E_+)v_k = k(\lambda_0 - k + 1)v_{k-1}.$$

W szczególności, ponieważ  $0 = \rho(E_+)v_{n+1} = (n+1)(\lambda_0 - (n+1) + 1)v_n$ , mamy  $\lambda_0 = n$ .

*Dowód:* Dla  $k = 1$  mamy  $\rho(E_+)v_1 = \rho(E_+)\rho(E_-)v_0 = \rho(H)v_0 = \lambda_0 v_0$ . Zakładając, że równość jest spełniona dla  $n = k$ , mamy (przypomnijmy, że  $v_{k+1} = \rho(E_-)v_k$ ):

$$\rho(E_+)v_{k+1} = \rho(E_+)\rho(E_-)v_k = (\rho(E_-)\rho(E_+) + \rho(H))v_k = \rho(E_-)k(\lambda_0 - k + 1)v_{k-1} + (\lambda_0 - 2k)v_k =$$

$$(k(\lambda_0 - k + 1) + (\lambda_0 - 2k))v_k = (k + 1)(\lambda_0 - k)v_k.$$

□

Zauważmy teraz, że podprzestrzeń rozpięta przez wektory  $v_0, \dots, v_n$  jest niezmiennicza, musi więc pokrywać się z  $V$ . Otrzymaliśmy w ten sposób nieskończoną serię reprezentacji indeksowanych przez  $n \in \mathbb{N}$ . Przestrzeń  $V^{(n)}$  jest rozpięta przez  $v_0, \dots, v_n$ , a operatory reprezentacji są dane przez

$$\begin{aligned}\rho^{(n)}(H)v_k &= (n - 2k)v_k, \\ \rho^{(n)}(E_-)v_k &= v_{k+1}, \\ \rho^{(n)}(E_+)v_k &= k(n - k + 1)v_{k-1}.\end{aligned}$$

Podsumowując otrzymujemy

**TWIERDZENIE** *Każda nieprzywiedlna reprezentacja algebry  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  jest postaci  $\rho^{(n)}$  dla pewnego  $n$ .*

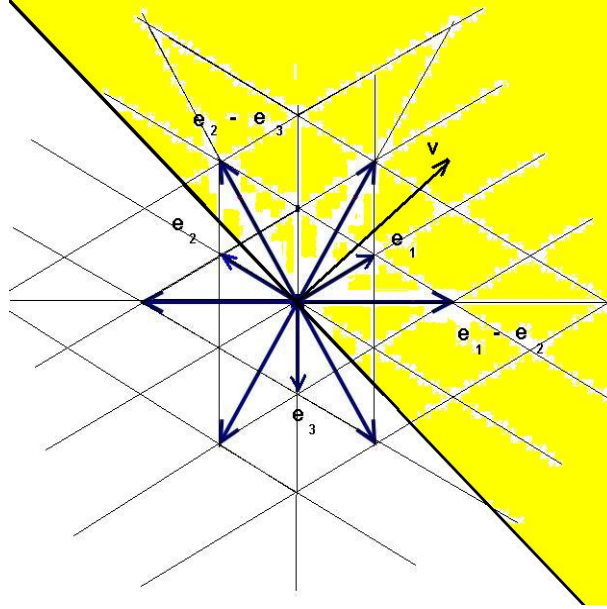
**$\mathfrak{sl}(2)$ -trójki oraz krata wagowa  $\Lambda_W$ :** Niech teraz  $\mathfrak{g}$  będzie dowolną (półprostą) algebrą Liego. Dla  $\alpha \in \Delta$  rozważmy podprzestrzeń  $S_\alpha$  w  $\mathfrak{g}$  rozpiętą przez podprzestrzenie  $\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}, [\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}]$ . Jest oczywiste, że jest to podalgebra Liego w  $\mathfrak{g}$ . Ponadto, łatwo wybrać generatory  $E_+ \in \mathfrak{g}^\alpha, E_- \in \mathfrak{g}^{-\alpha}, H'_\alpha \in [\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}]$  spełniające relacje komutacyjne algebry  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . Wystarczy wybrać  $H'_\alpha$  proporcjonalnie do wektora pierwiastkowego  $H_\alpha$  tak, żeby  $\alpha(H'_\alpha) = B_{\mathfrak{g}}(H_\alpha, H'_\alpha) = 2$ , wziąć  $E_+$  niezerowe, a  $E_-$  wybrać tak, żeby  $B_{\mathfrak{g}}(E_+, E_-) = 2/B_{\mathfrak{g}}(H_\alpha, H_\alpha)$  (przypomnijmy, że  $[E_+, E_-] = B_{\mathfrak{g}}(E_+, E_-)H_\alpha$ ).

Powyższa analiza reprezentacji  $\mathfrak{sl}(2)$  pokazuje, że wagi dowolnej reprezentacji nieprzywiedlnej (więc i każdej reprezentacji) przyjmują całkowite wartości na wektorach  $H'_\alpha$ . W szczególności można traktować wagi jako elementy z  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ . Zbiór wszystkich funkcjonałów z  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$  przyjmujących wartości całkowite na wektorach  $H'_\alpha, \alpha \in \Delta$ , nazywamy kratą wagową i oznaczamy przez  $\Lambda_W$ . Zauważmy, że  $\Lambda_W \supset \Lambda_R$  (jeżeli traktujemy pierwiastki i ich krotności jako elementy z  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ ).

**Niezmienniczość  $\Lambda_W$  względem grupy Weyla  $W(R)$ :** Dowodzi się analogicznie jak niezmienniczość układu pierwiastków  $\Delta$ , czyli używa się przy tym  $\alpha$ -szeregów zawierających  $\beta$ , gdzie  $\beta$  jest wagą, a  $\alpha$  pierwiastkiem (por. Wykład 10).

**Najwyższa waga reprezentacji:** Ustalmy wektor niezerowy  $v \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  nie należący do żadnej z hiperpłaszczyzn  $\alpha^\perp$  (por. Wykład 12). Dla reprezentacji  $\rho$  wagą najwyższą nazwiemy wagę  $\beta$ , która przyjmuje największą wartość na wektorze  $v$ . Odpowiedni wektor własny  $w \in V, \rho(H)w = \beta(H)w, H \in \mathfrak{h}$  nazywamy *najwyższym wektorem wagowym*.

**PRZYSZYKŁAD:** Dla poniższego wyboru wektora  $v$  najwyższą wagą reprezentacji dołączonej będzie  $e_1 - e_3$ , a najwyższą wagą reprezentacji naturalnej będzie  $e_1$ .



- TWIERDZENIE**
1. Dla dowolnej reprezentacji  $\rho$  istnieje waga najwyższa  $\beta$ .
  2. Odpowiedni najwyższy wektor wagowy w zeruje się przez wszystkie operatory  $\rho(\mathfrak{g}^\alpha), \alpha \in R^+$  (tutaj  $R^+$  jest zbiorem pierwiastków dodatnich, związanych z wyborem  $v$ ).
  3. Podprzestrzeń  $W \subset V$  generowana przez wielokrotne zastosowanie operatorów  $\rho(\mathfrak{g}^\alpha), \alpha \in R^-$ , do  $w$  jest nieprzywiedlna.
  4. Każda reprezentacja nieprzywiedlna posiada jedyny (z dokładnością do proporcjonalności) najwyższy wektor wagowy.

**PRZYKŁAD:** Dla reprezentacji  $\rho^{(n)}$  wagami są  $\{n, n-2, \dots, -n\}$ . Najwyższa waga to  $n$ , a najwyższy wektor wagowy to  $v_0$ .

*Dowód twierdzenia:* Punkt pierwszy jest oczywisty: ilość wag jest skończona. Punkt 2 wynika z tego, że  $(\beta + \alpha)(v) > \beta(\alpha)$  dla  $\alpha \in R^+$ , więc  $\beta + \alpha$  nie może być wagą. Punkt 3 dowodzi się analogicznie do przypadku algebry  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . Punkt 4: gdyby było dwie różne wagi najwyższe  $\beta, \beta'$ , musiałyby się różnić o kombinację liniową o współczynnikach z  $\mathbb{N}$  pierwiastków z  $R^-$ . Wtedy  $\beta(v) > \beta'(v)$  lub  $\beta'(v) > \beta(v)$ .  $\square$

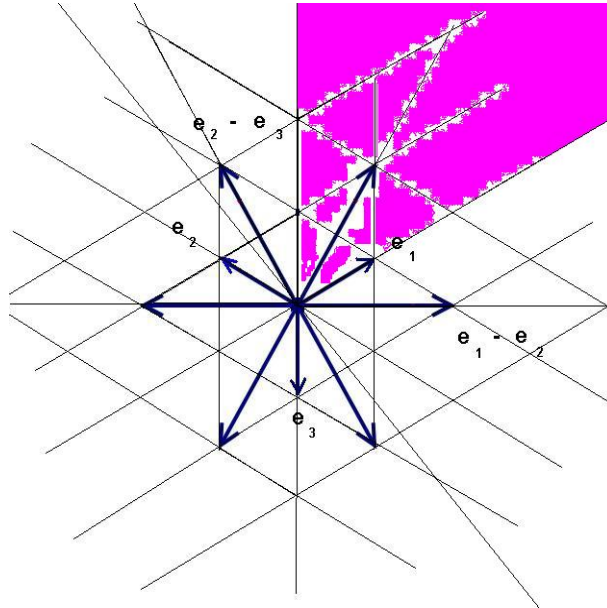
**Waga najwyższa i inne wagi reprezentacji:** Niech  $\rho$  będzie reprezentacją nieprzywiedlną  $\alpha \in \mathfrak{h}_R^*$  jej wagą najwyższą. Oznaczmy przez  $W(R)\alpha$  orbitę  $\alpha$  pod działaniem grupy Weyla, a przez  $\text{conv}(W(R)\alpha)$  jej powłokę wypukłą.

**PRZYKŁAD:** Dla reprezentacji dołączonej  $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$  mamy  $W(R)\alpha = \Delta$ , a dla reprezentacji naturalnej  $W(R)\alpha = \{e_1, e_2, e_3\}$ .

**TWIERDZENIE** Zbiór wag reprezentacji  $\rho$  jest równy  $\text{conv}(W(R)\alpha) \cap (\lambda + \Lambda_R)$ .

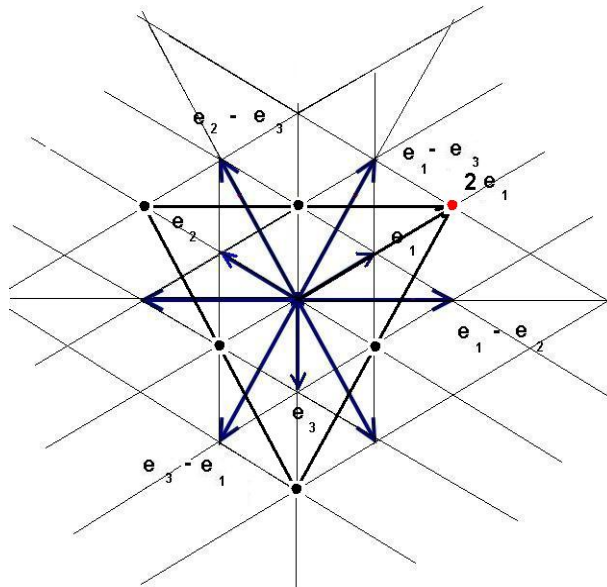
*Bez dowodu.*

**Klasyfikacja reprezentacji nieprzywiedlnych:** *Komórką Weyla*  $C$  nazywamy domknięcie składowej spójnej zbioru  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* \setminus \bigcup_{\alpha \in \Delta} \alpha^\perp$ . Komórkę Weyla o tej własności, że  $c(H_\alpha) > 0$  dla wszystkich  $c \in C, \alpha \in R^+$ , nazywamy  *dodatnią* (innymi słowy jest to taka komórka Weyla, której elementy tworzą kąt ostry lub prosty ze wszystkimi pierwiastkami dodatnimi). Na rysunku poniżej mamy przykład dodatniej komórki Weyla.



**TWIERDZENIE** *Ustalmy dodatnią komórkę Weyla  $C$ . Każdy element  $\alpha \in C \cap \Lambda_W$  jest wagą najwyższą pewnej reprezentacji nieprzywiedlnej  $\rho_\alpha$ .*

**PRZYKŁAD:** Niech  $\alpha := 2e_1$ .



Wtedy  $W(R)\alpha = \{\alpha, 2e_2 = \alpha + 2(e_2 - e_1), 2e_3 = \alpha + 2(e_3 - e_1)\}$ ,  $\text{conv}(W(R)\alpha)$  jest trójkątem rozpiętym przez te punkty. Przesuwając  $\alpha$  o krotności pierwiastków wewnątrz tego trójkąta znajdziemy jeszcze trzy wagi:  $-e_1 = \alpha + 2(e_2 - e_1) + (e_3 - e_2)$ ,  $-e_2 = \alpha + (e_3 - e_1)$ ,  $-e_3 = \alpha + (e_2 - e_1)$ . Przestrzeń reprezentacji  $\rho_\alpha$  będzie 6-wymiarowa generowana przez najwyższy wektor wagowy  $w_1 := w$  oraz wektory  $w_2 := \rho_\alpha(E_{31})w$ ,  $w_3 := \rho_\alpha(E_{31})^2w$ ,  $w_4 := \rho_\alpha(E_{21})w$ ,  $w_5 := \rho_\alpha(E_{21})^2w$ ,  $w_6 := \rho_\alpha(E_{23})\rho_\alpha(E_{21})^2w$ .

*Ćwiczenie:* Znajdź działanie wszystkich operatorów reprezentacji  $\rho_\alpha$  na wektory  $w_1, \dots, w_6$ . *Wskazówka:* skorzystaj z relacji komutacyjnych algebry  $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$  oraz z punktu 2 twierdzenia o najwyższym wektorze wagowym.

## Literatura

- [Ada69] J. Frank Adams, *Lectures on Lie groups*, Benjamin, 1969.
- [DK00] J. Duistermaat and J. Kolk, *Lie groups, Universitext*, Springer, 2000.
- [FH91] William Fulton and Joe Harris, *Representation theory*, Springer, 1991.
- [Hel00] Sigurdur Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, AMS, 2000.
- [KS10] Yvette Kosmann-Schwarzbach, *Groups and symmetries*, Springer, 2010, Translated from French.
- [Pos86] Mikhail Postnikov, *Lectures in geometry: Lie groups and Lie algebras. Semester 5.*, Mir, 1986.
- [Tra] Andrzej Trautman, *Grupy oraz ich reprezentacje*, Skrypt do wykładu, dostępne na <http://www.fuw.edu.pl/amt>.
- [Woj86] Wojciech Wojtyński, *Grupy i algebry Liego*, PWN, 1986.