Teoria grup I

Andriy Panasyuk

Spis treści

1 Wprowadzenie do wykładu, cz. I

Grupa: Zbiór G wyposażony w "działanie" $\mu : G \times G \to G$ (skrótowo oznaczamy $\mu(a, b) =: a \cdot b$ lub poprostu ab) spełniające następujące aksjomaty:

1. działanie jest łączne, czyli
$$(ab)c = a(bc) \;\; \forall \; a, b, c \in G;$$

2. istnieje element $e \in G$, zwany "neutralnym", taki, że
$$ea = ae = a \;\; \forall \; a \in G;$$

3. dla każdego $a \in G$ istnieje element "odwrotny" a^{-1}, czyli taki, że

$$aa^{-1} = a^{-1}a = e.$$

Uwaga: Element neutralny jest jedyny: jeśli e' inny neutralny, to $e' = e'e = e$. Analogicznie, dla każdego $a \in G$ element odwrotny a^{-1} jest wyznaczony jednoznacznie.

Podgrupa grupy G: Podzbiór $H \subset G$ o własnościach 1) $\mu(H, H) \subset H$ oraz 2) $H^{-1} \subset H$, czyli

$$1)\ ab \in H \quad \forall\ a, b \in H \text{ oraz } \ 2)\ a^{-1} \in H \quad \forall\ a \in H.$$

Uwaga: 1) i 2) implikują $e \in H$ oraz fakt, że podgrupa H sama staje się grupą z działaniem $\mu|_{H \times H}$.

Przykład podstawowy - grupa permutacji: Permutacją zbioru X nazywamy bijekcję $a : X \to X$. Zbiór bijekcji oznaczamy S_X (S od „symetrii", grupę permutacji inaczej nazywamy „grupą symetrii" zbioru X) i wyposażamy w działanie - złożenie bijekcji, czyli $\mu(a, b) := a \circ b : X \to X$. Element neutralny - odwzorowanie identycznościowe Id_X, element odwrotny do a - odwzorowanie odwrotne $a^{-1} : X \to X$.

Inne przykłady: Wszystkie inne przykłady grup to podgrupy grupy S_X (:-o, na serio: jest to treść twierdzenia Cayley'a).

Przykłady bardziej przyziemne:

1. $G = \{*\}$ grupa jednoelementowa.

2. $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +), (\mathbb{Z}^n, +), (\mathbb{R}^n, +), (\mathbb{C}^n, +)$; przy tym mamy ciągi podgrup: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}, \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$.

3. $(\mathbb{R}_{\neq 0}, \cdot), (\mathbb{R}_{>0}, \cdot), (\mathbb{C}_{\neq 0}, \cdot)$; ciąg podgrup $\mathbb{R}_{>0} \subset \mathbb{R}_{\neq 0} \subset \mathbb{C}_{\neq 0}$.

4. $U(1) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ (podgrupa $\mathbb{C}_{\neq 0}$).

5. S_n, grupa permutacji zbioru n-elementowego.

Uwaga: 1.- 4. są przykładami grup *przemiennych* lub *abelowych*, czyli takich, że

$$\mu(a, b) = \mu(b, a) \quad \forall\ a, b \in G.$$

5. jest przykładem grupy nieprzemiennej, jeśli $n > 2$.

Przykłady mniej przyziemne otrzymują się w ramach następującej *ważnej* konstrukcji. Załóżmy, że zbiór X wyposażony jest w pewną "strukturę" $\mathfrak{S}$. Wybierzmy z S_X tylko bijekcje o tej własności, że one same i ich odwrotności "zachowują" $\mathfrak{S}$, i oznaczmy przez $S_{X,\mathfrak{S}}$ ich zbiór. Wtedy $S_{X,\mathfrak{S}}$ jest podgrupą w S_X. Grupa $S_{X,\mathfrak{S}}$ jest „grupą symetrii" struktury $\mathfrak{S}$ i często zawiera istotną informację o $\mathfrak{S}$ (zob. przykład „podłogi", poniżej).

Przykład: $\mathfrak{S}$ struktura przestrzeni liniowej na X, wtedy zachowanie struktury oznacza liniowość bijekcji, $S_{X,\mathfrak{S}} = GL(X)$ (od angielskiego *general linear*) grupa odwracalnych liniowych przekształceń przestrzeni X.

Przykład: $\mathfrak{S}$ struktura przestrzeni liniowej na X wraz z formą objętości σ, $S_{X,\mathfrak{S}} = SL(X)$ (od angielskiego *special linear*) grupa odwracalnych liniowych przekształceń przestrzeni X zachowujących σ. *Uwaga:* $SL(X)$ jest podgrupą $GL(X)$.

Przykład: $\mathfrak{S}$ struktura przestrzeni euklidesowej na X, czyli X jest przestrzenią liniową z zadaną metryką euklidesową $(|)$, $S_{X,\mathfrak{S}} = O(X)$ grupa ortogonalna, czyli grupa liniowych bijekcji, zachowujących metrykę. *Uwaga:* $O(X)$ jest podgrupą $GL(X)$.

Przykład: $SO(X) := SL(X) \cap O(X)$.

Przykład: Niech $X = \mathbb{R}^4$ będzie wyposażone w strukturę metryki $(|)$ o sygnaturze $(1,3)$, czyli $\mathfrak{S}$ będzie strukturą lorentzowską na X. Wtedy $S_{X,\mathfrak{S}} = O(1,3)$, grupa liniowych bijekcji zachowujących $(|)$, jest tzw. grupą Lorentza.

Przykład: $\mathfrak{S}$ struktura przestrzeni metrycznej lub topologicznej na X, zachowanie struktury oznacza ciągłość bijekcji, $S_{X,\mathfrak{S}}$ grupa homeomorfizmów przestrzeni X.

Przykład: $\mathfrak{S}$ struktura rozmaitości gładkiej na X, zachowanie struktury oznacza gładkość bijekcji, $S_{X,\mathfrak{S}}$ grupa dyfeomorfizmów przestrzeni X.

Działanie (lewe) grupy G na zbiorze X: Odwzorowanie $\nu : G \times X \to X$ (skrótowo oznaczamy też $\nu(g,x) =: g \cdot x$) o własnościach

1. $(g_1 \cdot g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x) \;\; \forall\, g_1, g_2 \in G, x \in X$;
2. $e \cdot x = x \;\; \forall\, x \in X$.

Przykład: Działanie grupowe $\mu : G \times G \to G$ jest przykładem lewego (oraz prawego) działania G na G.

Przykład: Grupa S_X w naturalny sposób działa na X: $a \cdot x := a(x), a \in S_X, x \in X$. *Uwaga:* jest to *lewe* działanie: $(a \cdot b) \cdot x = (a \circ b)(x) = a(b(x)) = a \cdot (b \cdot x)$.

Przykład: Analogicznie, $S_{X,\mathfrak{S}}$ działa na X.

Orbita elementu $x \in X$ działania G na X: $G \cdot x := \{g \cdot x \mid g \in G\}$.

Uwaga: X jest sumą rozłączną orbit działania. Rzeczywiście, każdy element zawiera się w jakiejś orbicie (bo $e \cdot x = x$), ponadto, jeśli $x \in G \cdot x'$ oraz $x \in G \cdot x''$, to $G \cdot x' = G \cdot x''$ (bo $x = g' \cdot x' = g'' \cdot x'' \Longrightarrow x' = (g')^{-1} \cdot g'' \cdot x'' \Longrightarrow g \cdot x' = g \cdot (g')^{-1} \cdot g'' \cdot x'' \Longrightarrow G \cdot x' \subset G \cdot x''$ i odwrotnie).

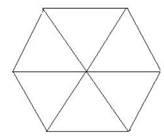
Stabilizator G^x elementu $x \in X$ względem działania G na X: $G^x := \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$.

Uwaga 1. Stabilizator jest podgrupą: $g_1 \cdot x = x, g_2 \cdot x = x \Longrightarrow (g_1 \cdot g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = g_1 \cdot x = x$ oraz $g \cdot x = x \Longrightarrow x = g^{-1} \cdot g \cdot x = g^{-1} \cdot x$.

Uwaga 2. Stabilizatory elementów z jednej orbity są sprzężone: $x' = h \cdot x \Longrightarrow G^x = h^{-1} G^{x'} h$ (*Ćwiczenie*).

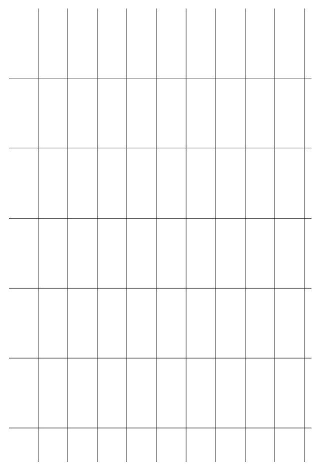
Stabilizator G^Y podzbioru $Y \subset X$ względem działania G na X: $G^Y := \{g \in G \mid g \cdot Y \subset Y\}$.

Przykład: Grupa D_n symetrii wielokąta prawidłowego o n wierzchołkach. Niech $X = \mathbb{R}^2$ ze standardową metryką euklidesową, Y n-kąt foremny o środku w zerze:



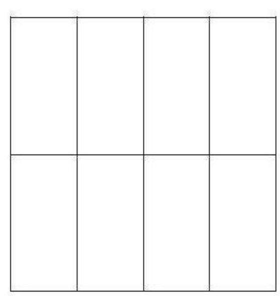
Wtedy D_n jest podgrupą grupy $O(X)$ będąca stabilizatorem Y.

Przykład: Grupa G symetrii „podłogi", składa się z: 1)„kraty" $\mathbb{Z}\times 2\mathbb{Z}$; 2) odbić względem prostych poziomych i pionowych, przechodzących przez węzły kraty oraz przez środki „płytek"; 3) obrotów o $180°$ względem węzłów kraty oraz punktów leżących w środkach płytek oraz ich krawędzi.



Grupa G działa na $\mathbb{R}^2$. Orbita zera: $\mathbb{Z}\times 2\mathbb{Z}$. Ona nie pokrywa się z „podłogą" (bo nie zawiera „fugi"), ale dobrze odzwierciedla nierównoprawność poziomego i pionowego kierunku. Czyli znając samą tylko grupę symetrii obiektu czasem (nie zawsze, zob. następny przykład) możemy w dużej mierze odtworzyć strukturę obiektu.

Przykład: Grupa G symetrii „kawałka podłogi"



jest o wiele biedniejsza, ma tylko 3 nietrywialne elementy: odbicia względem prostych pionowej i poziomej przechodzących przez środek „kawałka" oraz ich złożenie, czyli obrót o $180°$. Taka grupa bardzo słabo odzwierciedla strukturę obiektu. Powodem jest jego „nijednorodność". Do opisu symetrii takich obiektów lepiej służą grupoidy, uogólnienia grup [Wei96].

2 Wprowadzenie do wykładu, cz. II

Grupy „dyskretne”: $\mathbb{Z}^n$, „symetrie podłogi” (nieskończone), S_n, D_n (skończone).

Grupy „ciągłe”: $(\mathbb{R}^n, +), (\mathbb{R}_{>0}, \cdot), (\mathbb{R}_{\neq 0}, \cdot), (\mathbb{C}_{\neq 0}, \cdot), GL(X), SL(X), O(1, 3)$ (niezwarte), $U(1), O(X)$, $SO(X)$ (zwarte).

Grupy topologiczne (Liego): Są to grupy (G, μ) takie, że G jest wyposażone w strukturę przestrzeni topologicznej (rozmaitości różniczkowej) o tej własności, że odwzorowanie $\mu : G \times G \to G$ oraz odwzorowanie $\epsilon : g \mapsto g^{-1} : G \to G$ są ciągłe (gładkie).

Uwaga: Jeśli G jest grupa topologiczną (Liego), w poniższych definicjach wymagamy ciąłości (gładkości) wszystkich odwzorowań.

Reprezentacja grupy G w przestrzeni liniowej X: działanie $\nu : G \times X \to X$ takie, że dla każdego $g \in G$ odwzorowanie $\nu(g, \cdot) : X \to X$ jest liniowe.

Przykład: naturalna reprezentacja grup $GL(X), SL(X), O(X), SO(X), O(1, 3), D_n$ w przestrzeni X.

Homomorfizm grup: Odwzorowanie $f : G_1 \to G_2$ pomiędzy dwiema grupami o własnościach:

$$f(e_1) = e_2,\ f(a \cdot_1 b) = f(a) \cdot_2 f(b) \ \ \forall a, b \in G_1.$$

Izomorfizm grup: Homomorfizm $f : G_1 \to G_2$ będący bijekcją. *Uwaga:* Odwrotne odwzorowanie $f^{-1} : G_2 \to G_1$ automatycznie jest homomorfizmem: $f^{-1}(c \cdot d) = f^{-1}(f(f^{-1}(c)) \cdot f(f^{-1}(d))) = f^{-1}(f(f^{-1}(c) \cdot f^{-1}(d))) = f^{-1}(c) \cdot f^{-1}(d)$.
Grupa automorfizmów grupy G: Nawiasem mówiąc, otrzymaliśmy jeszcze jeden przykład grupy $S_{X,\mathfrak{G}}$: $\mathfrak{G}$ jest strukturą grupy na zbiorze $X = G$, a $S_{X,\mathfrak{G}}$ grupą izomorfizmów z G w G, które nazywamy *automorfizmami* G. Oznaczamy $\mathrm{Aut}(G) := S_{G,\mathfrak{G}}$.

Przykład: Dla dowolnej G odwzorowanie $\mathrm{Id}_G : G \to G$ jest przykładem izomorfizmu, a odwzorowanie $f : G \to \{*\}$ homomorfizmu.

Przykład: $\exp(\cdot) : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_{\neq 0}, \cdot)$ homomorfizm, $\exp(\cdot) : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ izomorfizm.

Przykład: $\exp(2\pi i \cdot) : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{C}_{\neq 0}, \cdot)$ homomorfizm.

Przykład: $f : U(1) \to SO(\mathbb{R}^2)$ izomorfizm, tutaj $SO(\mathbb{R}^2)$ grupa obrotów płaszczyzny, f odwzorowuje liczbę $e^{i\phi}$ w obrót o kąt ϕ.

Równoważność działań: Działania $\nu_1 : G_1 \times X_1 \to X_1$ i $\nu_2 : G_2 \times X_2 \to X_2$ nazywają się równoważnymi, jeśli istnieje izomorfizm grup $f : G_1 \to G_2$ oraz bijekcja $h : X_1 \to X_2$ takie, że następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd} G_1 \times X_1 \arrow[r, "\nu_1"] \arrow[d, "f \times h"] & X_1 \arrow[d, "h"] \\ G_2 \times X_2 \arrow[r, "\nu_2"] & X_2 \end{tikzcd}$$

czyli $h(\nu_1(g, x)) = \nu_2(f(g), h(x)) \ \ \forall\ g \in G_1, x \in X_1$.

Ważne pytania matematyczne:

1. Sklasyfikować grupy z dokładnością do izomorfizmu;

2. Sklasyfikować działania (w tym reprezentacje) z dokładnością do równoważności.

„Sklasyfikować” w ideale oznacza: 1) sporządzić listę „cegiełek”, czyli „prostych”[1] obiektów (grup w przypadku 1., czy w przypadku 2. działań ustalonej grupy), których strukturę znamy; 2) określić procedurę budowania z „cegiełek” bardziej skomplikowanych obiektów; 3) podać kryteria, kiedy wybrany obiekt jest izomorficzny (równoważny) z jednym z obiektów zbudowanych z „cegiełek”.

W rzeczywistości, takie listy „cegiełek” istnieją, ale istnieją też obiekty nie „poddające się klasyfikacji”.

Naszym najbliższym celem będzie zdefiniowanie „cegiełek” w przypadku grup.

Jądro homomorfizmu $f : G_1 \to G_2$: $\ker f := f^{-1}(e_2)$.

Podgrupa normalna: Podgrupę $H \subset G$ nazywamy *normalną*, jeśli $gHg^{-1} \subset H$ dla wszystkich $g \in G$.

Związek pomiędzy grupami normalnymi a jądrami homomorfizmów:

TWIERDZENIE *Podzbiór $H \subset G$ grupy G jest podgrupą normalną wtedy i tylko wtedy gdy jest jądrem pewnego homomorfizmu $f : G \to G_2$.*

Dowód: ($\Longleftarrow$) Niech $f : G \to G_2$ będzie homomorfizmem, a $H := \ker f$. Wtedy

$$a, b \in H \Longrightarrow f(a) = e_2, f(b) = e_2 \Longrightarrow f(ab) = f(a)f(b) = e_2e_2 = e_2 \Longrightarrow ab \in H;$$

$$a \in H \Longrightarrow f(a^{-1}) = (f(a))^{-1} = e_2^{-1} = e_2 \Longrightarrow a^{-1} \in H;$$
$$f(gHg^{-1}) = f(g)f(H)f(g^{-1}) = f(g)e_2(f(g))^{-1} = e_2 \Longrightarrow gHg^{-1} \subset H.$$

Dowód implikacji ($\Longrightarrow$) pokrywa się z następującą konstrukcją.

Grupa ilorazowa G/H i homomorfizm naturalny $G \to G/H$: Niech G będzie grupą z działaniem $\mu : G \times G \to G$ a $H \subset G$ będzie dowolną podgrupą. Wtedy ograniczenie $\mu|_{G\times H}$ daje prawe działanie grupy H na zbiorze G. Orbita elementu $g \in G$ pod względem tego działania ma postać $gH = \{gh \mid h \in H\}$ i nazywa się *prawą* warstwą g ze względu na H. Zbiór takich warstw oznaczamy G/H. Zbiór G jest sumą rozłączną warstw (jako że dowolny zbiór z działaniem grupy jest sumą rozłączną orbit). Ponadto, wszystkie warstwy mają jednakową moc, równą mocy H: odwzorowanie $H \ni h \mapsto gh \in gH$ jest bijekcją.

LEMAT *Niech $H \subset G$ będzie podgrupą normalną. Wtedy:*

1. *każda prawa warstwa gH pokrywa się z lewą warstwą $Hg := \{hg \mid h \in H\}$;*

2. *wzór $gH \cdot g'H = (g \cdot g')H$ zadaje poprawnie określone działanie $\bar{\mu} : G/H \times G/H \to G/H$ spełniające aksjomaty działania grupowego;*

[1] Słowo „prostych” piszemy w cudzysłowie, ponieważ „cegiełki” mogą mieć dosyć skomplikowaną strukturę. Na przykład tzw. grupa *Potwór* (ang. Monster), będąca grupą prostą w sensie definicji, którą poznamy za moment, liczy $2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71 = 808017424794512875886459904961710757005754368000000000 \approx 8 \cdot 10^{53}$ elementów, zob. http://en.wikipedia.org/wiki/Monster_group

3. odwzorowanie $\pi : G \to G/H$, $\pi(g) := gH$ jest homomorfizmem grup.

Dowód: 1. $gHg^{-1} \subset H \iff gHg^{-1} = H \iff gH = Hg$
2. Poprawność: niech $g_1 \in gH, g_1' \in g'H$, wtedy istnieją $h \in H, h' \in H'$ takie, że $g_1 = gh, g_1' = g'h'$.
Mamy $g_1H \cdot g_1'H = (g_1 \cdot g_1')H = ghg'h'H = ghg'H = ghHg' = gHg' = gg'H$.
Łączność: $(gH \cdot g'H) \cdot g''H = (gg')H \cdot g''H = (gg')g''H = g(g'g'')H = gH \cdot (g'g'')H = gH \cdot (g'H \cdot g''H)$.
Element neutralny: $eHgH = egH = gH = geH = gHeH$.
Element odwrotny: $g^{-1}HgH = g^{-1}gH = eH = gg^{-1}H = gHg^{-1}H$.
3. $\pi(gg') = gg'H = gHg'H = \pi(g)\pi(g'), \pi(e) = eH$. □

Uwaga I: Homomorfizm π jest epimorfizmem (czyli jest surjektywny). *Uwaga II:* Żeby jakiś epimorfizm $f : G_1 \to G_2$ był izomofrizmem, wystarczy i dosyć, żeby jego jądro było trywialne (tj. $\ker f = \{e_1\}$) (*Ćwiczenie*).

Obraz homomorfizmu:

LEMAT *Obraz $H_2 := \operatorname{im} f$ homomorfizmu $f : G_1 \to G_2$ jest pogrupą w G_2 izomorficzną z G_1/H_1, gdzie $H_1 := \ker f$.*

Dowód: Jeśli $a, b \in H_2$, to istnieją $a_1, b_1 \in G_1$ takie, że $f(a_1) = a, f(b_1) = b$. Wtedy $f(a_1b_1) = f(a_1)f(b_1) = ab$, czyli $H_2 \cdot H_2 \subset H_2$. Z kolei, $f(a_1^{-1}) = (f(a_1))^{-1} = a^{-1}$ implikuje $(H_2)^{-1} = H_2$.

Szukany izomorfizm określimy wzorem $G_1/H_1 \ni gH_1 \overset{\bar{f}}{\mapsto} f(g) \in H_2$. Odwzorowanie $\bar{f}$ jest określone poprawnie: jeśli $g' \in gH$ inny przedstawiciel warstwy, to $g'g^{-1} = h$ dla pewnego $h \in H$, i $f(g')(f(g))^{-1} = f(h) = e_2$ skąd $f(g') = f(g)$. Podobnie sprawdzamy, że jest homomorfizmem oraz że ma trywialne jądro. □

PRZYKŁAD: Każda podgrupa H grupy abelowej G jest normalna. W szczególności, jeśli weźmiemy $G = \mathbb{Z}, H = n\mathbb{Z}$, otrzymujemy grupę *cykliczną* $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

PRZYKŁAD: Obrazem homomorfizmu $\exp(2\pi i \cdot) : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{C}_{\neq 0}, \cdot)$ jest podgrupa $U(1) \subset (\mathbb{C}_{\neq 0}, \cdot)$, a jego jądrem podgrupa $(\mathbb{Z}, +)$. Mamy więc izomorfizm $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong U(1)$.

PRZYKŁAD: Niech $\operatorname{sign} : S_n \to (\mathbb{R}_{\neq 0}, \cdot)$ homomorfizm odwzorowujący permutację τ w ± 1 w zależności od znaku τ. Jądrem jest tutaj grupa *alternująca* A_n permutacji parzystych, a obrazem grupa 2-elmentowa $\{\pm 1\}$ izomorficzna z $\mathbb{Z}_2$. Mamy izomorfizm $S_n/A_n \cong \mathbb{Z}_2$.

PRZYKŁAD: Niech G będzie dowolną grupą. Określmy odwzorowanie $\phi : G \to \operatorname{Aut}(G)$ wzorem $g \mapsto A_g, A_g(h) := ghg^{-1}$ (poprawność: $A_g(hh') = ghh'g^{-1} = ghg^{-1}gh'g^{-1} = A_g(h)A_g(h'), A_g(e) = e, A_g^{-1} = A_{g^{-1}}$). Ponadto, samo ϕ jest homomorfizmem: $A_{gg'} = A_g \circ A_{g'}, A_e = \mathrm{Id}_G$. Jego obraz $\operatorname{Int}(G) \subset \operatorname{Aut}(G)$ nazywamy grupą *automorfizmów wewnętrznych*.

Okazuje się, że $\operatorname{Int}(G)$ podgrupa normalna w $\operatorname{Aut}(G)$: jeśli $f : G \to G$ dowolny automorfizm, to $f \circ A_g \circ f^{-1}(h) = f(g[f^{-1}(h)]g^{-1}) = f(g)f[f^{-1}(h)]f(g^{-1}) = A_{f(g)}(h)$, czyli $f \circ \operatorname{Int}(G) \circ f^{-1} \subset \operatorname{Int}(G)$.

Grupę ilorazową $\operatorname{Out}(G) := \operatorname{Aut}(G)/\operatorname{Int}(G)$ nazywamy grupą *automorfizmów zewnętrznych* grupy G.

Grupy proste: Są to grupy G nie posiadające nietrywialnych (czyli rożniących się od G i $\{e\}$) podgrup normalnych.

Uwaga: W przypadku grup topologicznych lub Liego w definicji grup prostych dopuszczamy istnienie nietrywialnych normalnych podgrup *dyskretnych*[2]. Np. prosta grupa Liego $SL(\mathbb{R}^2)$ ma nietrywialną dyskretną podgrupę normalną $\{\pm I\}$.

To właśnie grupy proste są cegiełkami, „dającymi się sklasyfikować".

[2]Dyskretność podgrupy $H \subset G$ oznacza dyskretność H jako przestrzeni topologicznej, czyli istnienie dla każdego punktu $h \in H$ otoczenia nie przecinającego się z otoczeniami innych punktów z H.

3 Iloczyny proste i półproste oraz rozszerzenia grup, cz. I

Literatura dodatkowa: [Kir72, Kir76]

Poniżej określimy sposoby „sklejania cegiełek”, czyli budowania z kilku grup jednej, bardziej skomplikowanej grupy.

Iloczyn prosty grup $G_1, \ldots, G_n$: Jest to zbiór $G_1 \times \cdots \times G_n$ wyposażony w działanie $(g_1, \ldots, g_n) \cdot (h_1, \ldots, h_n) := (g_1 h_1, \ldots, g_n h_n)$ z elementem neutralnym $(e_1, \ldots, e_n)$ oraz $(g_1, \ldots, g_n)^{-1} := (g_1^{-1}, \ldots, g_n^{-1})$. (Poniżej będziemy nieco nietradycyjnie oznaczać elementy iloczynu kartezjańskiego nawiasami kwadratowymi [ ].)

Przykład: Grupa $GL_+(2, \mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R}) \mid \det A > 0\}$ jest izomorficzna z $\mathbb{R}_{>0} \times SL(2, \mathbb{R})$, gdzie $SL(2, \mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$. Rzeczywiście, izomorfizm zadajemy wzorem $F : \mathbb{R}_{>0} \times SL(2, \mathbb{R}) \to GL_+(2, \mathbb{R}), F([x, X]) := xX$ a jego odwrotność to $Z \to [\sqrt{\det Z}, Z/\sqrt{\det Z}]$.

Iloczyn półprosty $G_2 \ltimes G_1$ grup G_2 i G_1: Załóżmy, że mamy działanie grupy G_2 na grupie G_1, „respektujące strukturę grupy” na G_1. Innymi słowy, zadany jest homomorfizm $f : G_2 \to \mathrm{Aut}(G_1)$ (w takiej sytuacji można też powiedzieć, że jest zadana reprezentacja grupy G_2 w grupie G_1).

Określamy działanie na zbiorze $G_2 \times G_1$: $[g_2, g_1] \cdot [h_2, h_1] := [g_2 \cdot h_2, g_1 \cdot f_{g_2} h_1]$ (tutaj oznaczyliśmy $f_{g_2} h_1 := f(g_2) h_1$).

Łączność: $([g_2, g_1] \cdot [h_2, h_1]) \cdot [j_2, j_1] = [g_2 \cdot h_2, g_1 \cdot f_{g_2} h_1] \cdot [j_2, j_1] = [(g_2 \cdot h_2) \cdot j_2, (g_1 \cdot f_{g_2} h_1) \cdot f_{g_2 \cdot h_2} j_1] = [g_2 \cdot h_2 \cdot j_2, (g_1 \cdot f_{g_2} h_1) \cdot (f_{g_2} \circ f_{h_2} j_1)] = [g_2 \cdot h_2 \cdot j_2, g_1 \cdot (f_{g_2} h_1 \cdot f_{g_2}(f_{h_2} j_1))] = [g_2 \cdot (h_2 \cdot j_2), g_1 \cdot (f_{g_2}(h_1 \cdot f_{h_2} j_1))] = [g_2, g_1] \cdot [h_2 \cdot j_2, h_1 \cdot f_{h_2} j_1] = [g_2, g_1] \cdot ([h_2, h_1] \cdot [j_2, j_1])$

Element neutralny: $[e_2, e_1]$

Element odwrotny: $[g_2, g_1]^{-1} := [g_2^{-1}, f_{g_2^{-1}} g_1^{-1}]$

Inne oznaczenie dla $G_2 \ltimes G_1$ to $G_2 \times_f G_1$.

Przykład: Grupa $O(\mathbb{R}^2)$ liniowych odwracalnych przekształceń ortogonalnych płaszczyzny euklidesowej jest izomorficzna z iloczynem $\mathbb{Z}_2 \ltimes SO(\mathbb{R}^2)$ grupy $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ z grupą obrotów $SO(\mathbb{R}^2)$. Rzeczywiście, $O(\mathbb{R}^2)$ jest izomorficzna z grupą $O(2, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R}) \mid AA^T = I\} = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1, ac + bd = 0\}$ a $SO(\mathbb{R}^2)$ z $SO(2, \mathbb{R}) = \{A \in O(2, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$).

Określmy homomorfizm $f : \{\pm 1\} \to \mathrm{Aut}(SO(2, \mathbb{R}))$ wzorem $1 \mapsto \mathrm{Id}, -1 \mapsto L$, gdzie $L : O_\phi \mapsto O_{-\phi}$, tutaj $O_\phi := \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$) jest macierzą obrotu o kąt ϕ. Zauważmy, że L rzeczywiście jest elementem $\mathrm{Aut}(SO(2, \mathbb{R}))$: odwzorowanie $L : SO(2, \mathbb{R}) \to SO(2, \mathbb{R})$ jest ograniczeniem do $SO(2, \mathbb{R})$ automorfizmu wewnętrznego A_g grupy $O(2, \mathbb{R})$, gdzie $g = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (*Ćwiczenie:* sprawdzić ten fakt). Ponadto, ponieważ $g^2 = I$, odwzorowanie f jest homomorfizmem.

Zostało zbudować izomorfizm $F : \mathbb{Z}_2 \times_f SO(2, \mathbb{R}) \to O(2, \mathbb{R})$. Połóżmy $\sigma(1) := 0, \sigma(-1) := 1$ oraz $F([x, X]) := Xg^{\sigma(x)}$ (mamy $f(x) = A_{g^{\sigma(x)}}$). Wtedy $F([x, X] \cdot [y, Y]) = F([xy, XA_{g^{\sigma(x)}}(Y)]) = Xg^{\sigma(x)} Y g^{\sigma(x)} g^{\sigma(xy)} = Xg^{\sigma(x)} Y g^{\sigma(x^2 y)} = Xg^{\sigma(x)} Y g^{\sigma(y)} = F([x, X]) \cdot F([y, Y])$. Homomorfizm odwrotny: $F^{-1}(Z) := [\det Z, Zg^{\sigma(\det Z)}]$. (*Ćwiczenie:* sprawdzić, że $FF^{-1}(Z) = Z$ oraz $F^{-1}F([x, X]) = [x, X]$.)

Przykład: Grupa $GL(2, \mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$, jest izomorficzna z $\mathbb{R}^* \ltimes SL(2, \mathbb{R})$, gdzie $SL(2, \mathbb{R}) : \{A \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$, a $\mathbb{R}^*$ to inne oznaczenie dla grupy $(\mathbb{R}_{\neq 0}, \cdot)$. Rzeczywiście, określmy odwzorowanie $\tau : \mathbb{R}^* \to \{0, 1\}, \tau(x) := \sigma(\mathrm{sign}(x))$, oraz homomorfizm $f : R^* \to$

$\mathrm{Aut}(SL(2,\mathbb{R})), f(x) := A_{g^{\tau(x)}}$. Izomorfizm $F : \mathbb{R}^* \times_f SL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$ określamy wzorem $F([x,X]) := xXg^{\tau(x)}$. *Ćwiczenie:* zbudować izomorfizm odwrotny, sprawdzić szczegóły.

PRZYKŁAD: Grupa $SE(2,\mathbb{R}) := SO(2,\mathbb{R}) \times_f \mathbb{R}^2$ ruchów płaszczyzny euklidesowej. Tutaj $f : SO(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^2)$ standardowe działanie grupy obrotów płaszczyzny na płaszczyźnie.

Uwaga 1: Jeśli f jest homomorfizmem trywialnym, to $G_2 \times_f G_1 \cong G_2 \times G_1$.

Pytanie 1: Czy bywają nietrywialne f, dla których też $G_2 \times_f G_1 \cong G_2 \times G_1$? Bardziej ogólnie: jeśli $f, f' : G_2 \to \mathrm{Aut}(G_1)$ dwa homomorfizmy, kiedy istnieje izomorfizm $G_2 \times_{f_1} G_1 \cong G_2 \times_{f_2} G_1$

Uwaga 2: odwzorowanie $\pi : [g_2, g_1] \mapsto g_2 : G \to G_2$ jest epimorfizmem grup: $\pi([g_2,*][h_2,*]) = \pi([g_2h_2,*]) = g_2h_2 = \pi([g_2,*])\pi([h_2,*])$. Stąd mamy wnioski: a) $\{e\}\times G_1 = \ker\pi$ podgrupa normalna w $G = G_2 \times_f G_1$; b) $G/G_1 \cong G_2$ (izomorfizm grup).

Pytanie 2: Czy każda grupa G posiadająca podgrupę normalną G_1 jest izomorficzna z $G_2 \times_f G_1$, gdzie f pewien homomorfizm z grupy ilorazowej $G_2 = G/G_1$ w grupę $\mathrm{Aut}(G_1)$?

W celu znalezienia odpowiedzi na to pytanie wprowadźmy kilka nowych pojęć.

Ciąg dokładny homomorfizmów grup: Jest to ciąg $\cdots \xrightarrow{f_{k-1}} G_k \xrightarrow{f_k} G_{k+1} \to \cdots$ grup i ich homomorfizmów taki, że $\mathrm{im}\, f_{k-1} = \ker f_k$ dla każdego k.

Krótki ciąg dokładny: Jest to ciąg dokładny postaci $\{*\} \to G_1 \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} G_2 \to \{*\}$. W szczególności mamy: $\ker\iota = \{e\}$, czyli ι jest włożeniem (monomorfizmem); $\mathrm{im}\,\pi = G_2$, czyli π jest epimorfizmem; $\mathrm{im}\,\iota = \ker\pi$, czyli podgrupa $\mathrm{im}\,\iota \cong G_1$ jest podgrupą normalną, a grupa G_2 jest izomorficzna z grupą ilorazową G/G_1.

Rozszerzenie grupy G_2 za pomocą grupy G_1: Jest to krótki ciąg dokładny postaci

$$\{*\} \to G_1 \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} G_2 \to \{*\}. \tag{1}$$

Przykład: $G = G_2 \times_f G_1, \iota_\times(g_1) := [e, g_1], \pi_\times([g_2, g_1]) := g_2$.

Równoważność rozszerzeń: Rozszerzenia $\{*\} \to G_1 \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} G_2 \to \{*\}$ oraz $\{*\} \to G_1 \xrightarrow{\iota'} G' \xrightarrow{\pi'} G_2 \to \{*\}$ są równoważne, jeśli istnieje izomorfizm $Q : G \to G'$ dla którego następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd}
 & & G \arrow[d, "Q"] \arrow[dr, "\pi"] & & \\
\{*\} \arrow[r] & G_1 \arrow[ur, "\iota"] \arrow[r, "\iota'"] & G' \arrow[r, "\pi'"] & G_2 \arrow[r] & \{*\}
\end{tikzcd}$$

Pytanie 2 teraz można przeformułować w nieco węższym kontekscie. **Pytanie 2′:** czy każde rozszerzenie $\{*\} \to G_1 \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} G_2 \to \{*\}$ jest równoważne z $\{*\} \to G_1 \xrightarrow{\iota_\times} G_1 \times_f G_2 \xrightarrow{\pi_\times} G_2 \to \{*\}$ dla pewnego f? *Pytanie 1*, natomiast, teraz sformułujemy w następujący sposób. **Pytanie 1′:** dla jakich f, f' rozszerzenia $\{*\} \to G_1 \xrightarrow{\iota_\times} G_1 \times_f G_2 \xrightarrow{\pi_\times} G_2 \to \{*\}$ oraz $\{*\} \to G_1 \xrightarrow{\iota_\times} G_1 \times_{f'} G_2 \xrightarrow{\pi_\times} G_2 \to \{*\}$ są równoważne? Spróbujemy dać na odpowiedź na te pytania w terminach tzw. *kohomologii* grupy G_2 w szczególnym przypadku *abelowej* grupy G_1.

Założenie o grupie G_1: Od tego momentu zakładamy, że G_1 jest *abelowa*. Operację w G_1 będziemy oznaczali plusem, element neutralny zerem, a element odwrotny minusem (tzw. *notacja addytywna*).

Kohomologie grupy G_2 o wartościach w (abelowej) grupie G_1: Niech $f : G_2 \to \mathrm{Aut}(G_1)$ ustalony homomorfizm. Dowolną funkcję $c : G_2^n \to G_1$ nazywamy n-kołańcuchem na G_2 o wartościach G_1. Zbiór n-kołańcuchów oznaczmy przez $C^n(G_2, G_1)$ (tworzy on grupę abelową ze względu na dodawanie funkcji). Z definicji $C^0(G_2, G_1) = G_1$. Określmy odwzorowania $d^i : C^i(G_2, G_1) \to C^{i+1}(G_2, G_1)$

$$\begin{aligned} d^0c(g) &:= f_g c - c, \ \ c \in G_1, g \in G_2; \\ d^1c(g,h) &:= f_g c(h) - c(gh) + c(g), \ \ g, h \in G_2, c \in C^1(G_2, G_1); \\ d^2c(g,h,j) &:= f_g c(h,j) - c(gh,j) + c(g,hj) - c(g,h), \ \ g,h,j \in G_2, c \in C^2(G_2, G_1). \end{aligned}$$

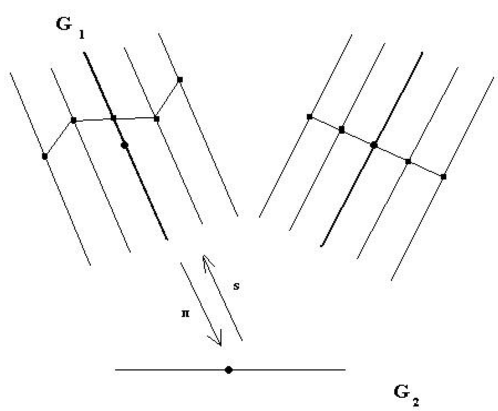
Łatwo się sprawdza (*Ćwiczenie*), że 1) d^i jest homomorfizmem grup; 2) $d^{i+1}d^i = 0$. Z 2) mamy wniosek: $\mathrm{im}\, d^i \subset \ker d^{i+1}$. Mówimy, że $Z^i(G_2, G_1) := \ker d^i$ jest i-tą grupą *kocykli*, $B^i(G_2, G_1) := \mathrm{im}\, d^i$ jest i-tą grupą *kobrzegów*, a $H^i(G_2, G_1) := \ker d^i / \mathrm{im}\, d^{i-1}$ jest i-tą grupą *kohomologii* grupy G_2 („o wartościach w G_1", lub, bardziej dokładnie, „w reprezentacji f").

4 Iloczyny proste i półproste oraz rozszerzenia grup, cz. II

Próba odpowiedzi na pytanie 2′: Rozważmy rozszerzenie (1). Najpierw zauważmy, że w tej sytuacji mamy jednoznacznie określone działanie G_2 na G_1, czyli homomorfizm $f : G_2 \to \mathrm{Aut}(G_1)$. Istotnie, każdy element $g \in G$ określa automorfizm wewnętrzny A_g, który zachowuje podgrupę G_1 ponieważ ona jest normalna. Czyli mamy homomorfizm $F : G \to \mathrm{Aut}(G_1), g \mapsto A_g|_{G_1}$. Elementy z G_1 leżą w jądrze tego homomorfizmu, bo G_1 jest abelowa, czyli F „przepuszcza się" przez G/G_1. Innymi słowy istnieje jedyny $f : G_2 \to \mathrm{Aut}(G_1)$ taki, że następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "F"] & \\ G/G_1 \arrow[r, "f"] & \mathrm{Aut}(G_1) \end{tikzcd} .$$

Następnie, wybierzmy cięcie odwzorowania π (czyli takie odwzorowanie $s : G_2 \to G$, że $\pi s = \mathrm{Id}_{G_2}$) o własności $s(e_2) = 0$. Wybór takiego cięcia jest równoważny wyborowi jednego przedstawiciela $s(g_2)$ w każdej warstwie $\pi^{-1}(g_2), g_2 \in G_2$, co, z kolei, jest równoważne utożsamieniu *zbiorów* G i $G_2 \times G_1$ a odwzorowań ι, π z włożeniem $\iota_\times : g_1 \mapsto [e, g_1] : G_1 \to G_2 \times G_1$ oraz z rzutem $\pi_\times$ na pierwszą składową odpowiednio. (Istotnie, jeśli $g_2 \in G_2, h \in \pi^{-1}(g_2) = G_1 s(g_2)$, to istnieje jedyne $g_1 := h(s(g_2))^{-1} \in G_1$ takie, że $h = g_1 s(g_2)$. Punkt h utożsamiamy z parą $[g_2, g_1]$.)



Dalej zakładamy, że $G = G_2 \times G_1$ (jako zbiór) i pytamy jakie mnożenia (działania grupowe) w $G_2 \times G_1$ są *dopuszczalne*, czyli takie, że odwzorowania $\iota_\times, \pi_\times$ są homomorfizmami grup.

LEMAT *Dopuszczalne mnożenia są postaci*

$$[g_2, g_1][h_2, h_1] = [g_2 h_2, g_1 + f_{g_2} h_1 + c(g_2, h_2)], \tag{2}$$

gdzie $c(e,e) = 0$ oraz $c \in Z^2(G_2, G_1)$, czyli jest kocyklem. *Ponadto, jeśli c, c' są dwoma kocyklami odpowiadającymi równoważnym rozszerzeniom, to $c - c' \in B^2(G_2, G_1)$, czyli istnieje $q \in C^1(G_2, G_1)$ o własności $c - c' = dq$. Przy tym $q(e) = 0$.*

Uwaga:

Dowód: Sposób utożsamienia G z $G_2 \times G_1$ implikuje wzór

$$[e, h_1][g_2, g_1] = [g_2, g_1 + h_1], g_i, h_i \in G_i.$$

Istotnie, element $h_1 \in \pi^{-1}(e_2)$ utożsamia się z $[e, h_1(s(e_2))^{-1}] = [e, h_1]$, element $g \in \pi^{-1}(g_2)$ utożsamia się z $[g_2, g(s(g_2))^{-1}] = [g_2, g_1]$ (tutaj $g_1 := g(s(g_2))^{-1}$), skąd element $h_1 g \in \pi^{-1}(e_2 g_2) = \pi^{-1}(g_2)$ utożsamia się z $[g_2, h_1 g(s(g_2))^{-1}] = [g_2, h_1 g_1] = [g_2, h_1 + g_1]$.

Z kolei, sposób zadania homomorfizmu f daje

$$[g_2, g_1][e, h_1][g_2, g_1]^{-1} = [e, f_{g_2} h_1].$$

Fakt, że π jest homomorfizmem oznacza w szczególności, że

$$[g_2, 0][h_2, 0] = [g_2 h_2, c(g_2, h_2)]$$

dla pewnego $c \in C^2(G_2, G_1)$. Używając tych wzorów dostajemy

$$[g_2, g_1][e, h_1] = [g_2, g_1][e, h_1][g_2, g_1]^{-1}[g_2, g_1] = [e, f_{g_2} h_1][g_2, g_1] = [g_2, g_1 + f_{g_2} h_1]$$

oraz

$$[g_2, g_1][h_2, h_1] = [g_2, g_1][e, h_1][h_2, 0] = [g_2, g_1 + f_{g_2} h_1][h_2, 0] = [e, g_1 + f_{g_2} h_1][g_2, 0][h_2, 0] =$$

$$[e, g_1 + f_{g_2} h_1][g_2 h_2, c(g_2, h_2)] = [g_2 h_2, g_1 + f_{g_2} h_1 + c(g_2, h_2)].$$

Ponieważ $\iota_\times$ ma być homomorfizmem, mamy $\iota_\times(g_1)\iota_\times(h_1) = [e, g_1][e, h_1] = [e, g_1 + f_e h_1 + c(e, e)] = [e, g_1 + h_1] = \iota_\times(g_1 + h_1)$. Stąd $c(e, e) = 0$.

Teraz sprawdźmy warunek kocyklu:

$$([g_2, 0][h_2, 0])[j_2, 0] = [g_2 h_2, c(g_2, h_2)][j_2, 0] = [g_2 h_2 j_2, c(g_2, h_2) + c(g_2 h_2, j_2)]$$

$$[g_2, 0]([h_2, 0][j_2, 0]) = [g_2, 0][h_2 j_2, c(h_2, j_2)] = [g_2 h_2 j_2, f_{g_2} c(h_2, j_2) + c(g_2, h_2 j_2)].$$

Równoważność $Q : G_2 \times G_1 \to G_2 \times G_1$ rozszerzeń odpowiadających kocyklom c i c' oznacza istnienie odwzorowania $q : G_2 \to G_1$ takiego, że 1) $Q([g_2, g_1]) = [g_2, g_1 + q(g_2)]$ 2) Q jest homomorfizmem. Warunek 2) implikuje następujące równości:

$$Q([g_2, 0][h_2, 0]) = Q([g_2 h_2, c(g_2, h_2)]) = [g_2 h_2, c(g_2, h_2) + q(g_2 h_2)] =$$

$$Q([g_2, 0])Q([h_2, 0]) = [g_2, q(g_2)][h_2, q(h_2)] = [g_2 h_2, q(g_2) + f_{g_2} q(h_2) + c'(g_2, h_2)].$$

Stąd $c(g_2, h_2) - c'(g_2, h_2) = f_{g_2} q(h_2) - q(g_2 h_2) + q(g_2)$.

Mamy też $0 = c(e, e) - c'(e, e) = q(e) - q(e) + q(e) = q(e)$. $\square$

Uwaga: Jeśli kocykl c jest kobrzegiem, czyli $c = dq$ dla pewnego $q \in C^1(G_2, G_1)$, to odwzorowanie $s' : g_2 \mapsto [g_2, -q(g_2)] : G_2 \to G_2 \times G_1$ jest homomorfizmem. Istotnie, wyrażenie $s'(g_2 h_2) = [g_2 h_2, -q(g_2 h_2)]$ jest równe $s'(g_2)s'(h_2) = [g_2, -q(g_2)][h_2, -q(h_2)] = [g_2 h_2, -q(g_2) - f_{g_2} q(h_2) + c(g_2, h_2)]$ wskutek definicji dq.

Rozpoznawanie iloczynów półprostych wśród wszystkich rozszerzeń: Rozszerzenie (1) jest równoważne z $\{*\} \to G_1 \to G_1 \times_f G_2 \to G_2 \to \{*\}$ jeśli i tylko jeśli odwzorowanie π posiada cięcie

$s' : G_2 \to G$ będące *homomorfizmem* grup. Istotnie, poprzez wybór cięcia $s : G_2 \to G$ (nie będącego w ogólności homomorfizmem) utożsamiamy G z $G_2 \times G_1$ a samo s z odwzorowaniem $g_2 \mapsto [g_2, 0]$. Równowazność z iloczynem półprostym $G_1 \times_f G_2$ oznacza trywialność kocyklu c (czyli istnienie q takiego, że $c = dq$) i homomorficzność „nowego" cięcia $s' : g_2 \mapsto [g_2, -q(g_2)]$.

Uwaga: Element $q \in C^1(G_2, G_1)$ taki, że $dq = c$ jest określony z dokładnością do dodawania elementów kobrzegowych da (tutaj $a \in G_1, da(g_2) = f_{g_2}a - a$). Cięcie $s'' : G_2 \to G, s''(g_2) := [g_2, -q(g_2) - da(g_2)]$, jest otrzymane z ciecia s' zastosowaniem automorfizmu wewnętrznego $A_a : G \to G$, czyli $s'' = A_a \circ s'$. Istotnie, $[e, a][g_2, -q(g_2)][e, a]^{-1} = [g_2, a - q(g_2)][e, -a] = [g_2, a - q(g_2) - f_{g_2}a]$.

Przykład rozszerzenia nie bedącego iloczynem półprostym: Rozważmy tzw. grupę Heisenberga składającą się z macierzy postaci

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jasne, że jako zbiór ona może być utożsamiona z $\mathbb{R}^3$. Mnożenie natomiast jest zadawane następującym wzorem: $[x, y, z][x', y', z'] = [x + x', y + y' + xz', z + z']$. Jest to rozszerzenie grupy abelowej $G_2 = (\mathbb{R}^2, +)$ za pomocą grupy abelowej $G_1 = (\mathbb{R}, +)$ z kocyklem $c([x, z], [x', z']) := xz'$ (i trywialnym działaniem f). Kocykl ten nie może być kobrzegiem: kobrzeg $dq(g, h) = q(h) - q(gh) + q(g)$ na grupie abelowej jest funkcją symetryczną argumentów g, h. Kocykl c, natomiast, funkcją symetryczną nie jest.

W szczególności z tego wynika też, że grupa kohomologii $H^2(C_2, C_1)$ jest nietrywialna.

Uwaga: Powyższy lemat pokazuje, że grupa kohomologii $H^2(G_2, G_1)$ jest w bijekcji z klasami równoważności rozszerzeń grupy G_2 za pomocą grupy G_1.

Ćwiczenie: Pokazać, że klasy „autorównoważności" rozszerzenia (1) modulo „autorównoważności" pochodzące z automorfizmów wewnętrznych A_a, gdzie $a \in G_1$, są w bijekcji z grupą $H^1(G_2, G_1)$.

Odpowiedź na pytanie 1′: Ponieważ homomorfizm $f : G_2 \to \mathrm{Aut}(G_1)$ jest jednoznacznie wyznaczony przez rozszerzenie (1), rozszerzenia $\{*\} \to G_1 \overset{\iota_\times}{\to} G_1 \times_f G_2 \overset{\pi_\times}{\to} G_2 \to \{*\}$ oraz $\{*\} \to G_1 \overset{\iota_\times}{\to} G_1 \times_{f'} G_2 \overset{\pi_\times}{\to} G_2 \to \{*\}$ są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy $f = f'$.

Zadania na ćwiczenia. *Inne spojrzenie na działanie grupy na zbiorze:* Niech $\nu : G \times X \to X$ będzie lewym działaniem grupy G na zbiorze X. Pokazać, że: 1) przy ustalonym $g \in G$ odwzorowanie $x \mapsto \nu(g, x) : X \to X$ jest bijekcją, czyli $\nu(g, \cdot) \in S_X$; 2) odwzorowanie $g \mapsto \nu(g, \cdot) : G \to S_X$ jest homomorfizmem grup. Odwrotnie, każdy homomorfizm $f : G \to S_X$ zadaje działanie $\nu : G \times X \to X$ według wzoru $\nu(g, x) := f_g x$ (tutaj $f_g := f(g)$).

„Działanie z kocyklem": Niech $f : G_2 \to \mathrm{Aut}(G_1)$ będzie homomorfizmem, a $q \in Z^1(G_2, G_1)$ pewnym kocyklem. Pokazać, że odwzorowanie $\tilde{f} : G_2 \to S_{G_1}, \tilde{f}_{g_2} g_1 := f_{g_2} g_1 + q(g_2)$, jest homomorfizmem, czyli zadaje działanie G_2 na G_1 za pomocą „przekształceń afinicznych".

Przykład 1: Niech $G_2 := (\mathbb{R}^n, +), G_1 := (\mathbb{R}^m, +)$ i niech $f : G_2 \to \mathrm{Aut}(G_1)$ homomorfizm trywialny. Pokazać, że każdy operator liniowy $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest kocyklem. Znaleźć orbitę i stabilizator każdego punktu $x \in \mathbb{R}^m$ ze względu na „działąnie z kocyklem" $\tilde{f}$.

Przykład 2: Niech $G_2 := SO(2, \mathbb{R}), G_1 := (\mathbb{R}^2, +)$ i niech $f : G_2 \to \mathrm{Aut}(G_1)$ działanie naturalne. Rozważmy kocykl $q = da$ będący kobrzegiem (tutaj $a \in G_1, q(g_2) := f_{g_2}a - a, g_2 \in G_2$). Opisać

„działanie z kocyklem” $\tilde{f}$. *Odpowiedź:* działanie $\tilde{f}$ polega na obrotach płaszczyzny wokół elementu $-a$.

5 Elementy teorii grup krystalograficznych

Literatura dodatkowa:[Szc][3]

Dygresja o topologii

Przestrzeń topologiczna: Zbiór X wraz z rodziną podzbiorów $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ nazywanych *otwartymi* o własnościach:

1. zbiory $\emptyset$ oraz X są otwarte;
2. zbiór $\bigcup_{\alpha\in B}$ jest otwarty dla dowolnego podzbioru $B \subset A$
3. przecięcie skończonej liczby zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

Rodzinę $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ nazywamy *topologią* na X.

Przykład 1: Rodzina zbiorów otwartych w dowolnej przestrzeni metrycznej.

Przykład 2: Topologia *dyskretna* składa się ze wszystkich podzbiorów zbioru X.

Przykład 3: Niech X przestrzeń topologiczna, $Y \subset X$ pewien podzbiór. Topologia *indukowana* na Y składa się ze wszystkich przecięć zbiorów otwartych w X z podzbiorem Y.

Odwzorowanie ciągłe $\phi : X \to Y$ pomiędzy przestrzeniami topologicznymi: jest to odwzorowanie takie, że przeciwobraz dowolnego zbioru otwartego (w Y) jest otwarty (w X).

Podzbiór zwarty $K \subset X$: Jest to podzbiór o tej własności, że z dowolnego pokrycia $\bigcup_{\alpha\in B} U_\alpha \supset K$ zbiorami *otwartymi* można wybrać podpokrycie skończone.

Topologia ilorazowa: Niech X będzie przestrzenią przestrzeń topologiczną, a $\mathcal{R} \subset X \times X$ relacją równoważności. Zbiór $X/\mathcal{R} = X/\!\sim$ klas równoważności posiada naturalną topologię zwaną *ilorazową*. Jest to najmocniejsza (czyli „najbogatsza") topologia na X/R, w której rzut naturalny $\pi : X \to X/\mathcal{R}$ jest ciągły. Zbiór $U \subset X/R$ jest w niej otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $\pi^{-1}(U)$ jest otwarty w X.

Przykład: Niech $X = \mathbb{R}^2$ i niech $(a, b) \sim (c, d) \overset{def}{\Longleftrightarrow} a = c$. Wtedy $X/$ naturalnie utożsamia się z $\mathbb{R}$, a topologia ilorazowa pokrywa się ze standardową topologią na $\mathbb{R}$.

Uwaga: Jeśli grupa G działa na zbiorze X, to relacja $a \sim b \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists g \in G\ a = gb$ jest relacją równoważności (*Ćwiczenie: sprawdzić*). Zbiór $X/\sim$ (oznaczany przez X/G) jest zbiorem orbit działania G na X.

Przykład: Niech $X = \mathbb{R}^2$ i niech grupa $SO(2, \mathbb{R})$ działa w sposób naturalny na X. Wtedy przestrzeń orbit X/G z topologią ilorazową jest promieniem $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$. Jeśli $C_n \subset SO(2, \mathbb{R})$ jest grupą cykliczną generowaną przez obrót o kąt $2\pi/n$, to X/C_n jest stożkiem.

Grupa euklidesowa: Niech $\mathbb{R}^n$ będzie wyposażone w standardowy iloczyn skalarny $(|)$. Odwzorowanie $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o własności $(\phi(x)|\phi(y)) = (x|y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ nazywamy izometrią. *Ćwiczenie:* sprawdzić, że izometrie tworzą grupę względem złożenia odwzorowań.

Lemat *Każda izometria $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest superpozycją $t_a \circ A$ przekształcenia ortogonalnego $A \in O(\mathbb{R}^n)$ i translacji $t_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto x + a, a \in \mathbb{R}^n$.*

[3] Zob. także http://pl.wikipedia.org/wiki/Krystalografia, http://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group

Dowód: ćwiczenie.

Grupę izometrii nazywamy grupą *euklidesową* i oznaczamy $E(\mathbb{R}^n)$.

LEMAT *Grupa $E(\mathbb{R}^n)$ jest izomorficzna z iloczynem półprostym $O(n,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n =: E(n,\mathbb{R})$.*

Dowód: Niech $[A]$ będzie macierzą odwzorowania A w dowolnej bazie ortonormalnej, a $[a]$ kolumną współrzędnych elementu a. Określmy odwzorowanie $t_a \circ A \mapsto ([A],[a]) : E(\mathbb{R}^n) \to O(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$. Dla $x \in \mathbb{R}^n$ mamy $(t_b \circ B) \circ (t_a \circ A)x = (t_b \circ B)(Ax + a) = BAx + Ba + b$, wiec złożenie izometrii indukuje następujące działanie grupowe na $O(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$: $([B],[b])([A],[a]) := ([B][A],[B][a] + [b])$. □

Poniżej pod grupą euklidesową będziemy rozumieć grupę $E(n,\mathbb{R})$.

Kozwarta grupa $\Gamma \subset E(n,\mathbb{R})$: Jest to podgrupa grupy euklidesowej taka, że przestrzeń orbit $\mathbb{R}^n/\Gamma$ jest zwarta.

PRZYKŁAD: Podgrupa $\Gamma = \{t_a \mid a \in \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n\} \cong \mathbb{Z}^n$ translacji całkowitoliczbowych jest kozwarta. Przestrzeń orbit $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ jest *torusem* n-wymiarowym.

Obszar fundamentalny: Niech $\Gamma \subset E(\mathbb{R}^n)$ będzie dowolną podgrupą. Podzbiór $F \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy obszarem fundamentalnym działania Γ na $\mathbb{R}^n$, jeśli

$$\bigcup_{g \in \Gamma} gF = \mathbb{R}^n$$

oraz $g\,\mathrm{int}(F) \cap g'\,\mathrm{int}(F) = \emptyset$ dla $g \neq g'$. Tutaj $\mathrm{int}(F)$ jest zbiorem *punktów wewnętrznych* zbioru F, czyli takich punktów $p \in F$, które posiadają otoczenie otwarte (czyli zbiór otwarty $U \ni p$) zawarte w F.

PRZYKŁAD: Kwadrat domknięty o boku 1 jest obszarem fundamentalnym dla działania grupy $\Gamma = \mathbb{Z}^n$. Obszarem fundamentalnym dla działania skończonej grupy obrotów C_n jest domknięty wycinek nieograniczony o kącie $2\pi/n$.

Krystalograficzna grupa Γ wymiaru n: Jest to *dyskretna*[4] i *kozwarta* podgrupa grupy euklidesowej $E(n,\mathbb{R})$.

PRZYKŁAD: $\Gamma = \mathbb{Z}^n$.

TWIERDZENIE *(Bieberbacha)*

1. *Jeżeli $\Gamma \subset E(n,\mathbb{R})$ jest grupą krystalograficzną, to jej zbiór translacji $\Gamma_t := \Gamma \cap (I \times \mathbb{R}^n)$ jest normalną podgrupą abelową skończonego indeksu (ostatnie oznacza, że grupa ilorazowa Γ/Γ_t jest skończona). Ponadto, Γ_t jest maksymalna podgrupą abelową w Γ (czyli nie zawiera się w żadnej większej podgrupie abelowej) i jest izomorficzna z $\mathbb{Z}^n$.*

2. *Dla każdego n istnieje skończona liczba klas izomorfizmu grup krystalograficznych wymiaru n.*

3. *Dwie grupy krystalograficzne wymiaru n są izomofriczne wtedy i tylko wtedy, gdy są sprzeżone w grupie $A(n,\mathbb{R})$ afinicznych przekształceń $\mathbb{R}^n$.*

[4] Zob. definicję podgrupy dyskretnej w przypisie na końcu Wykładu 2. Równoważna definicja: podzbiorem dyskretnym w przestrzeni topologicznej X nazywamy taki podzbiór $Y \subset X$, że topologia indukowana na Y jest dyskretną.

(Bez dowodu.)

Z punktu 1 wynika, że grupy krystalograficzne posiadają *zwarte* obszary fundamentalne. To stanowi podstawę ich zastosowań w krystalografii: ciało stałe jest kryształem (w odróżnieniu od „kwazikryształów" i ciał amorficznych), jeśli jego struktura atomowa jest okresowym powtórzeniem ograniczonego „kawałka" tej struktury.

PRZYKŁAD: Grupa $\mathbb{Z}^1 := \{t_{(n,0)} \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset E(2, \mathbb{R})$ nie ma zwartego obszaru fundamentalnego.

TWIERDZENIE *(Zassenhausa) Grupa Γ jest izomorficzna z grupą krystalograficzną wymiaru n wtedy i tylko wtedy, gdy ma normalną podgrupę abelową skończonego indeksu izomorficzną z $\mathbb{Z}^n$, będącą maksymalną podgrupą abelową.*

Dowód: Jedna z implikacji jest punktem 1 twierdzenia Bieberbacha.

Żeby udowodnić drugą rozważmy następujący diagram przemienny:

$$\begin{tikzcd}
\{*\} \arrow[r] & \mathbb{Z}^n \arrow[r] \arrow[d, "\iota_1"] & \Gamma \arrow[r] \arrow[d, "\iota_2"] & G \arrow[r] \arrow[d, "||"] & \{*\} \\
\{*\} \arrow[r] & \mathbb{R}^n \arrow[r] \arrow[d, "||"] & \widetilde{\Gamma} \arrow[r] \arrow[d, "\iota_4"] & G \arrow[r] \arrow[d, "\iota_3"] & \{*\} \\
\{*\} \arrow[r] & \mathbb{R}^n \arrow[r] & A(n, \mathbb{R}) \arrow[r] & GL(n, \mathbb{R}) \arrow[r] & \{*\},
\end{tikzcd}$$

którego składniki określimy poniżej.

W pierwszym wierszu $G := \Gamma/\mathbb{Z}^n$, czyli mamy rozszerzenie odpowiadające włożeniu podrgupy normalnej $\mathbb{Z}^n$ w grupę Γ i rzutowi na odpowiednią grupę ilorazową. Grupę $\widetilde{\Gamma}$ określmy jako iloczyn półprosty $G \ltimes \mathbb{R}^n$, a odwzorowanie ι_1, jako włożenie standardowe. Przypomnijmy sobie, że pierwszy wiersz jednoznacznie określa homomorfizm grup $f : G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^n)$ (wybieramy cięcie $s : G \to \Gamma$ i określamy $f(g)$ jako $A_{s(g)}|_{\mathbb{Z}^n}$). Zauważmy, że $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^n) = GL(n, \mathbb{Z})$ (ostanie wyrażenie oznacza grupę takich macierzy odwracalnych X, że X i X^{-1} mają współczynniki całkowite[5]) i oznaczmy przez $\tilde{f}$ złożenie $f : G \to GL(n, \mathbb{Z}) \hookrightarrow GL(n, \mathbb{R}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$, gdzie $\hookrightarrow$ jest włożeniem naturalnym.

Żeby określić odwzorowanie ι_2 najpierw zróbmy utożsamienie zbiorów $\phi_s : \Gamma \to G \times \mathbb{Z}^n$ (za pomocą cięcia s). Przypomnijmy również, że rozszerzenie z pierwszego wiersza zadaje kocykl $c \in Z^2(G, \mathbb{Z}^n)$ (odpowiadający homomorfizmowi f) określony z dokładnością do dodawania kobrzegów. Ponieważ każdy kocykl na G o wartościach w $\mathbb{Z}^n$ może być uważany za kocykl na G o wartościach w $\mathbb{R}^n$ (ostatni oznaczmy przez $\tilde{c}$), na iloczynie kartezjańskim $G \times \mathbb{R}^n$ mamy strukturę grupy, zadaną wzorem (2) (zob. lemat o dopuszczalnych mnożeniach z poprzedniego wykładu) z homomorfizmem $\tilde{f}$ i kocyklem $\tilde{c}$.

Natępnie skorzystamy z faktu, że $H^2(G, \mathbb{R}^n) = 0$, który przyjmiemy bez dowodu. Fakt ten mówi, że każdy 2-kocykl na G o wartościach w $\mathbb{R}^n$ jest kobrzegiem. W szczególności istnieje $q \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$

[5] izomorfizm grupy $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^n)$ z grupą $GL(n, \mathbb{Z})$ buduje się w sposób następujący. Niech $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ będą elementami bazy standardowej. Wtedy każdy $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^n)$ reprezentuje się w sposób jednoznaczny macierzą o wyrazach całkowitych, której kolumny są współczynnikami rozkładu $\phi(e_j)$ po tej że bazie. Macierz odwrotna będzie miała wyrazy całkowite, ponieważ odwzorowanie ϕ^{-1} rozumiane jako odwzorowanie $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zachowuje kratę $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$, w szczególności $\phi^{-1}(e_j)$ muszą mieć współczynniki całkowite rozkładu po bazie standardowej. Zauważmy, że każdy inny wybór bazy $Ae_1, \ldots, Ae_n$, gdzie $A \in GL(n, \mathbb{Z})$, zadaje inny izomorfizm $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^n) \cong GL(n, \mathbb{Z})$.

taki, że $dq = \tilde{c}$. Z ogólnej teorii wiemy, że q określa pewną bijekcję $G \times \mathbb{R}^n \to G \times \mathbb{R}^n$, zadającą izomorfizm wyżej określonej grupy $G \times \mathbb{R}^n$ z iloczynem półprostym $\widetilde{\Gamma} := G \times_{\tilde{f}} \mathbb{R}^n$. Oznaczmy tę bijekcję przez $\tilde{\iota}_2$, a ι_2 określmy jako złożenie $G = G \times \mathbb{Z}^n \hookrightarrow G \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\tilde{\iota}_2} \widetilde{\Gamma}$.

Teraz połóżmy $\iota_3 := \tilde{f}$ i zauważmy, że maksymalność podgrupy abelowej $\mathbb{Z}^n$ implikuje monomorficzność odwzorowania $\tilde{f}$. Istotnie, jeśli $g \in G$ jest nietrywialnym elementem należącym do jądra f, to $A_{s(g)}$ zostawia każdy element z $\mathbb{Z}^n$ na miejscu, czyli $s(g)$ komutuje z $\mathbb{Z}^n$. Wtedy podgrupa generowana przez $\mathbb{Z}^n$ i $s(g)$ jest abelowa. Z drugiej strony $s(g) \notin \mathbb{Z}^n$ (bo $s(g)$ leży w nietrywialnej warstwie), co przeczy maksymalności $\mathbb{Z}^n$.

Wreszcie określimy odwzorowanie ι_4. Grupa $A(n, \mathbb{R})$ afinicznych przekształceń przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest iloczynem półprostym $GL(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ (dowód jest analogiczny jak w przypadku grupy euklidesowej). Odwzorowanie ι_4 jest naturalnym włożeniem jednego iloczynu półprostego ($G \times_{\iota_3} \mathbb{R}^n$) w drugi ($GL(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$).

Ponieważ wszystkie odwzorowania ι_j są monomorfizmami, mamy włożenie grupy Γ w grupę $A(n, \mathbb{R})$. Zostało pokazać, że tak naprawdę G leży w $O(n, \mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{R})$. To wynika z następującego lematu, który udowodnimy w teorii reprezentacji.

Lemat *Każda skończona grupa macierzy $n \times n$ o wyrazach rzeczywistych jest sprzężona do grupy macierzy ortogonalnych.*

Z lematu tego wynika, że Γ jest izomorficzna z podgrupą w $E(n, \mathbb{R})$. Dyskretność tej podgrupy wynika z tego, że jako zbiór jest ona iloczynem prostym zbioru skończonego G oraz podzbioru dyskretnego $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$. Kozwartość, z kolei, wynika z tego, że $\Gamma_t \cong \mathbb{Z}^n$ (tę implikację przyjmujemy bez dowodu). $\square$

Algorytm Zassenhausa klasyfikacji grup krystalograficznych: Powyższy dowód sugeruje pewną metodę klasyfikacji grup krystalograficznych. Składa się ona z następujących kroków:

1. Opisać wszystkie skończone podgrupy G grupy $GL(n, \mathbb{Z})$ (z dokładnością do izomorfizmu).

2. Opisać wszystkie włożenia $\iota : G \to GL(n, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^n)$, czyli działania *wierne* (z dokładnością do równoważności).

3. Obliczyć $H^2(G, \mathbb{Z}^n)$ dla wszystkich grup z p. 1 i dla wszystkich działań z p. 2.

4. Określić które z grup otrzymanych za pomocą odpowiednich kocykli są izomorficzne (rozszerzenia odpowiadające różnym elementom $H^2(G, \mathbb{Z}^n)$ są nierównoważne, ale odpowiednie grupy mogą być izomorficzne).

Ilustracja algorytmu Zassenhausa dla grup „tapetowych" Grupami tapetowymi nazywamy grupy krystalograficzne wymiaru $n = 2$. Następujący lemat opisuje wynik 1-go i 2-go kroku algorytmu.

Lemat *(Ograniczenie krystalograficzne). Niech $G \subset GL(2, \mathbb{Z})$ będzie podgrupą skończoną. Wtedy G jest izomorficzna z jedną z następujących grup*

$$\{I\}, C_2, C_3, C_4, C_6, D_2, D_3, D_4, D_6.$$

Przy tym grupa C_2 ma 3 nierównoważne włożenia, a grupy D_2 i D_3 ma ich 2.

Lemat ten przyjmujemy bez dowodu, ale spróbujmy zrobić następujące *Ćwiczenie:* znaleźć (chociażby jedno) włożenie grup C_3, C_6 w $GL(2,\mathbb{Z})$.

Trzy nierównoważne włożenia grupy $C_2 = \{e, v\}$ w $GL(2,\mathbb{Z})$ zadają się wzorami $v \mapsto M_i, i = 1,2,3,$ gdzie $M_1 := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, M_2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, M_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ odpowiednio.

Zadanie na ćwiczenia: Obliczyć grupę $H^2(C_2,\mathbb{Z}^2)$ dla trzech powyższych działań C_2 na $\mathbb{Z}^2$ i zbudować odpowiednie grupy tapetowe.

Rozwiązanie: Rozważmy warunek kocyklu $c \in Z^2(G, G_1)$:

$$f_g c(h,j) - c(gh,j) + c(g,hj) - c(g,h) = 0, \ g,h,j \in G.$$

Podstawiając g,e,e lub e,e,j zamiast g,h,j otrzymujemy odpowiednio

$$f_g c(e,e) = c(g,e), c(e,j) = c(e,e).$$

W szczególności z tych wzorów wynika, że do tego, żeby określić 2-kocykl c na grupie dwuelementowej $G = C_2 = \{e,v\}$ wystarczy określić $c(e,e)$ oraz $c(v,v)$.

Zobaczmy, jakie ograniczenia na elementy $c(e,e), c(v,v)$ grupy G_1 nakłada warunek kocyklu. Łatwo sprawdzić, że jedyne niezależne ograniczenie otrzymujemy, gdy podstawiamy v,v,v zamiast g,h,j:

$$f_v c(v,v) - c(e,v) + c(v,e) - c(v,v) = 0$$

(tutaj skorzystaliśmy z tego, że $v^2 = e$), lub, z uwzględnieniem powyższych wzorów:

$$f_v c(v,v) - c(e,e) + f_v c(e,e) - c(v,v) = 0. \tag{3}$$

Podobnie, każdy 1-kołańcuch $q \in C^1(C_2, G_1)$ określony jest przez zadanie $q(e)$ oraz $q(v)$, a z definicji „różniczki” d mamy

$$dq(e,e) = q(e) - q(e) + q(e) = q(e), dq(g,g) = f_g q(g) - q(e) + q(g).$$

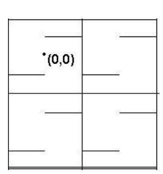
Niech $G := C_2, G_1 := \mathbb{Z}^2, c(e,e) := (a,b), c(v,v) := (r,s), q(e) := (m,n), q(v) := (k,l), a,b,r,s,m,n,k,l \in \mathbb{Z}$.

Przypadek 1: $f : C_2 \to GL(2,\mathbb{Z}), f_v := M_1$. Wtedy warunek kocyklu (3) implikuje wiąz $(-r,-s) - (a,b) + (-a,-b) - (r,s) = 0$, skąd $r = -a, s = -b$. Zbadajmy, czy kocykl c może być kobrzegiem dq:

$$(a,b) = c(e,e) = dq(e,e) = q(e) = (m,n), (r,s) = c(v,v) = dq(v,v) = (-k,-l) - (m,n) + (k,l) = (-m,-n).$$

Czyli, jeśli określimy $q(e) := (a,b)$, a $q(v)$ dowolnie, będziemy mieli $c = dq$. Innymi słowy $H^2(C_2,\mathbb{Z}^2) = 0$ w tym przypadku.

Odpowiednia grupa tapetowa naprzykład może być generowana przez elementy $t_{(0,0)} \circ M_1, t_{(1,0)}, t_{(0,1)}$ i być grupą symetrii poniższej „tapety”

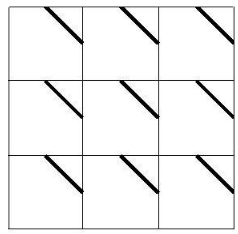


Przypadek 2: $f : C_2 \to GL(2,\mathbb{Z}), f_v := M_2$. Wtedy $(s,r) - (a,b) + (b,a) - (r,s) = 0$, skąd $a + r = b + s$. Czy kocykl c może być kobrzegiem dq?

$$(a,b) = c(e,e) = dq(e,e) = q(e) = (m,n), (r,s) = c(v,v) = dq(v,v) = (l,k) - (m,n) + (k,l) = (k+l-m, k+l-n).$$

Określmy $q(e)$ wzorem $q(e) := (a,b)$, a $q(v) := (k,l)$ tak, żeby $k + l = a + r = b + s$. Wtedy $c = dq$, czyli $H^2(C_2,\mathbb{Z}^2) = 0$ i w tym przypadku.

Przykładowa grupa tapetowa jest generowana przez elementy $M_2, t_{(1,0)}$ i jest grupą symetrii następującej „tapety”



Przypadek 3: $f : C_2 \to GL(2,\mathbb{Z}), f_v := M_3$. Wtedy $(r,-s) - (a,b) + (a,-b) - (r,s) = 0$, skąd $s = -b$. Czy kocykl c może być kobrzegiem dq?

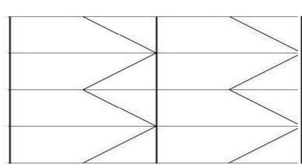
$$(a,b) = c(e,e) = dq(e,e) = q(e) = (m,n), (r,-b) = c(v,v) = dq(v,v) = (k,-l) - (m,n) + (k,l) = (2k-m, -n).$$

Spróbujmy określić q wzorami $q(e) := (a,b)$, $q(v) := (k,l)$ tak, żeby $2k - a = r$. Widać, że $a + r$ musi być liczbą *parzystą*. Stąd naprzykład kocykl c zadany przez $c(e,e) = (0,1), c(v,v) = (1,-1)$ jest kohomologicznie nietrywialny, czyli nie istnieje $q \in C^1(C_2,\mathbb{Z}^2)$ takiego, że $dq = c$!

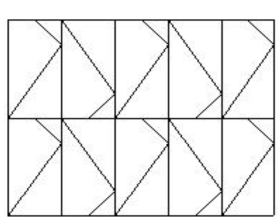
Łatwo też zrozumieć, że każdy kocykl $c \in Z^1(C_2,\mathbb{Z}^2)$ rozumiany jako element $Z^1(C_2,\mathbb{R}^2)$ jest kohomologicznie trywialny (por. dowód twierdzenia Zassenhausa), bo k obliczamy ze wzoru $k = (r+a)/2$.

Obliczmy grupę $H^2(C_2,\mathbb{Z}^2)$ (czyli ile jest tych kocykli nietrywialnych). Każdy kocykl wyznacza się jednoznacznie przez liczby a, b, r, mamy więc, $Z^2(C_2,\mathbb{Z}^2) \cong \mathbb{Z}^3$. Z kolei, $B^2(C_2,\mathbb{Z}^2) = \{(a,b,2k-a) \mid a,b,k \in \mathbb{Z}\} = \{(a,b,x) \mid a + x \in 2\mathbb{Z}\}$. Zauważmy, że $B^2(C_2,\mathbb{Z}^2) \subset Z^2(C_2,\mathbb{Z}^2)$ jest jądrem epimorfizmu $\mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, (a,b,x) \mapsto [a+x]$, gdzie $[a+x]$ jest klasą parzystości liczby $a+x$. Ostatecznie, $H^2(C_2,\mathbb{Z}^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong C_2$.

W przypadku 3 mamy 2 nieizomorficzne grupy tapetowe odpowiadające 2 elementom grupy H^2. Jedna, odpowiadająca kocyklowi trywialnemu, przykładowo jest generowana przez $M_3, t_{(2,0)}, t_{(1,0)}$ i jest grupą symetrii „tapety”



Druga, odpowiadająca kocyklowi nietrywialnemu, naprzykład może być generowana przez $t_{(1/2,0)} \circ M_3, t_{(0,1)}$ i jest grupą symetrii „tapety”



Jak „zobaczyć" nietrywialny kocykl c? Najpierw zauważmy, że elementy grupy Γ są kombinacjami $p^{k_1}q^{l_1}\cdots p^{k_m}q^{l_m}$, gdzie $k_i, l_i \in \mathbb{Z}$, a $p = t_{(0,1)}, q = t_{((1/2),0)} \circ M_3$ są wyżej wymieniomymi generatorami. Ponieważ, jak łatwo sprawdzić $q^2 = t_{(1,0)}, M_3 \circ t_{(1/2,0)} = t_{(1/2,0)} \circ M_3$ oraz $M_3 \circ p = t_{(0,-1)} \circ M_3$, każdy element grupy Γ jest postaci $t_{(n,l)}$ lub $t_{(n/2,l)} \circ M_3$, gdzie $n, l \in \mathbb{Z}$.

Przypomnijmy (zob. dowód lematu o dopuszczalnych mnożeniach w iloczynie kartezjańskim $G_2 \times G_1$), że wartość kocyklu $c(g,h)$ można „odczytać" z mnożenia elementów postaci $(g,0),(h,0)$ w iloczynie kartezjańskim. Wybierzmy cięcie $s : C_2 \to \Gamma$ naprzykład tak: $e \overset{s}{\mapsto} t_{(0,1)}, v \overset{s}{\mapsto} t_{(1/2,0)} \circ M_3$. Taki wybór cięcia daje nam utożsamienie $t_{(0,1)} \mapsto (e,(0,0)), t_{(1/2,0)} \circ M_3 \mapsto (v,(0,0))$ i, jako wniosek, następujące utożsamienie Γ (jako zbioru) z $C_2 \times \mathbb{Z}^2$: $t_{(n,l)} \overset{\psi}{\mapsto} (e,(n,l-1)), t_{(n/2,l)} \circ M_3 \overset{\psi}{\mapsto} (v,(n-1,l))$ (tutaj $n, l \in \mathbb{Z}$). Mamy

$$(e,(0,0))(e,(0,0)) = \psi(t_{(0,1)})\psi(t_{(0,1)}) = \psi(t_{(0,1)}t_{(0,1)}) = \psi(t_{(0,2)}) = (e,(0,1)),$$

skąd $c(e,e) = (0,1)$. Analogicznie

$$(v,(0,0))(v,(0,0)) = \psi(t_{(1/2,0)} \circ M_3)\psi(t_{(1/2,0)} \circ M_3) = \psi(t_{(1/2,0)} \circ M_3 \circ t_{(1/2,0)} \circ M_3) = \psi(t_{(1,0)}) = (e,(1,-1)),$$

skąd $c(v,v) = (1,-1)$.

6 Elementarna teoria reprezentacji, cz. I

Literatura dodatkowa: [Ser88]

Reprezentacja grupy G w przestrzeni wektorowej V nad ciałem $\mathbb{K}$: jest to lewe działanie $\nu : G \times V \to V$ grupy G na V poprzez transformacje liniowe. *Definicja równoważna:* Reprezentacją G w V nazywamy homomorfizm $\rho : G \to GL(V)$ z grupy G w grupę odwracalnych liniowych (nad $\mathbb{K}$) przekształceń przestrzeni V.

Ćwiczenie 1: Sprawdzić równoważność definicji, czyli pokazać, że 1) odwzorowanie $\rho_\nu(g) = \nu(g, \cdot) : V \to V$ należy do $GL(V)$; 2) odwzorowanie $g \mapsto \rho_\nu(g) : G \to GL(V)$ jest homomorfizmem; 3) odwrotnie, jeśli $\rho : G \to GL(V)$ pewien homomorfizm, to $\nu_\rho(g, v) := \rho(g)v$ jest działaniem liniowym.

Ćwiczenie 2: Sprawdzić, że w sposób podobny każde *prawe* działanie liniowe $\nu : V \times G \to V$ (będziemy takie działania nazywać *antyreprezentacjami*) generuje pewien *antyhomomorfizm* $\rho : G \to GL(V)$ (czyli $\rho(g_1g_2) = \rho(g_2)\rho(g_1)$).

Ćwiczenie 3: Udowodnić, że każde prawe działanie $x \mapsto xg$ grupy G na zbiorze X zadaje lewe działanie według wzoru $gx := xg^{-1}$ i na odwrót.

Przykład podstawowy: Niech $\nu : X \times G \to X$ będzie prawym działaniem grupy G na dowolnym zbiorze X i niech $V := \mathrm{Fun}(X, \mathbb{K})$ będzie przestrzenią funkcji na X o wartościach w $\mathbb{K}$. Wtedy wzór $(gf)(x) := f(xg), g \in G, x \in X, f \in V$, zadaje reprezentację G w V. Istotnie, przekształcenie $f \mapsto gf$ jest liniowe oraz $((g_1g_2)f)(x) = f(x(g_1g_2)) = f((xg_1)g_2) = (g_2f)(xg_1) = (g_1(g_2f))(x)$.

W ten oto sposób możemy sprowadzić badanie *dowolnych* działań do badania działań *liniowych*.

Uwaga: Jest kilka wersji powyższej konstrukcji. Na przykład, każde lewe działanie G na X zadaje antyreprezentację $(fg)(x) := f(gx)$, bądź, ze względu na powyższe Ćwiczenie, reprezentację $(gf)(x) := f(g^{-1}x)$.

Podprzestrzeń niezmiennicza $W \subset V$ reprezentacji $\nu : G \times V \to V$: Jest to podprzestrzeń W o własności $GW \subset W$ (równoważnie, $\rho(g)W \subset W \ \forall g \in G$).

W podprzestrzeni niezmienniczej $W \subset V$ mamy nową reprezentacje grupy G. Jest nią $\nu|_{G\times W} : G \times W \to W$ (nazywamy ją podreprezentacją reprezentacji ν).

Przykład: Niech G będzie grupą obrotów w $\mathbb{R}^3$ mających wspólną oś. Wtedy właśnie ta oś jest podprzestrzenią niezmienniczą.

Reprezentacja nieprzywiedlna: Jest to reprezentacja nie posiadająca nietrywialnych (różnych od $\{0\}$ i V) podprzestrzeni niezmienniczych.

Przykład: Niech $G = SO(\mathbb{R}^2)$ z naturalnym działaniem na $\mathbb{R}^2$. Jest to reprezentacja nieprzywiedlna, bo każda nietrywialna podprzestrzeń jest prostą przechodzącą przez zero, a żadna z takich prostych nie zachowuje się przez grupę obrotów.

Zauważmy, że grupa G jest izomorficzna z grupą z poprzedniego przykładu. W ten sposób mamy dwie *nierównoważne* reprezentacje grupy $SO(\mathbb{R}^2)$.

Reprezentacje nieprzywiedlne będą „cegiełkami", które będziemy próbować „sklasyfikować" i z których będziemy budować inne reprezentacje.

Reprezentacja w pełni przywiedlna: Jest to reprezentacja G o tej własności, że dla każdej podprzestrzeni $W \subset V$ niezmienniczej istnieje *niezmiennicza* podprzestrzeń *dopełniająca* $Z \subset V$ (czyli taka, że $W \oplus Z = V$).

PRZYKŁAD: Niech grupa $G := \{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ działa w sposób naturalny na $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ ay \end{bmatrix}.$$

Wtedy $W := \{\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\}$ jest podprzestrenią niezmienniczą tego działania, dla której *nie istnieje* dopełniającej podprzestrzeni niezmienniczej. *Dlaczego?*

Rozkład skończeniewymiarowej reprezentacji $\nu : G \times V \to V$ w pełni przywiedlnej na nieprzywiedlne: Algorytm: Jeśli V jest nieprzywiedlna, koniec. Jeśli nie, istnieje podprzestrzeń niezmiennicza $V_1 \subset V$ i dopełniająca podprzestrzeń niezmiennicza V_2. Jeśli obie są nieprzywiedlne, koniec. Jeśli nie, stosujemy powyższy algorytm do V_1 oraz V_2.

Iterując powyższe działania, na końcu (tutaj przydaje się skończeniewymiarowość) otrzymamy rozkład $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ przestrzeni V na nieprzywiedlne podprzestrzenie niezmiennicze.

Zupełna przywiedlność reprezentacji grup skończonych

TWIERDZENIE *Niech G będzie grupą* skończoną*, a V przestrzenią skończeniewymiarową nad ciałem $\mathbb{K}$ równym $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. Wtedy każda reprezentacja G w V jest w pełni przywiedlna.*

Najpierw udowodnimy następujący

LEMAT *W założeniach powyższego twierdzenia, na V istnieje* niezmienniczy *istnieje iloczyn skalarny $(|)$ (dwuliniowy w przypadku rzeczywistym i półtoraliniowy w zespolonym). Niezmienniczość oznacza*

$$(gx|gy) = (x|y) \ \forall g \in G, x, y \in V.$$

Dowód: Niech $\langle|\rangle$ dowolny iloczyn skalarny. Określmy

$$(x|y) := \sum_{h \in G} \langle hx|hy \rangle.$$

Niezmienniczość $(|)$ jest oczywista: $(gx|gy) = \sum_{h \in G} \langle hgx|hgy \rangle = \sum_{h \in G} \langle hx|hy \rangle = (x|y)$.

Sprawdzamy własności iloczynu skalarnego. 1) dwuliniowość (półtoraliniowość) wynika z tej że własności $\langle|\rangle$ oraz z liniowości odwzorowania $x \mapsto gx$; 2) symetria, $(x|y) = (y|x)$, i nieujemna określoność, $(x|x) \geq 0$, – z tych że własności $\langle|\rangle$; 3) $(|)$ jest niezdegenerowany: $(x|x) = \sum_{h \in G} \langle hx|hx \rangle = 0$ implikuje (na mocy dodatniej określoności $\langle|\rangle$) następującą własność:

$$\langle hx|hx \rangle = 0 \ \forall h \in G,$$

w szczególności $\langle x|x \rangle = 0$ i $x = 0$. □

Teraz jesteśmy w stanie udowodnić twierdzenie. Niech $W \subset V$ będzie podprzestrzenią niezmienniczą. Wtedy dopełnienie ortogonalne $W^\perp$ względem $(|)$ tez będzie niezmiennicze. Istotnie, jeśli $w \in W^\perp$, to $(w|v) = 0$ dla każdego $v \in W$. Ale z niezmienniczości $(|)$ również $(gw|gv) = 0$ dla każdego $v \in W$. Ponieważ gv przebiega całe W, gdy v przebiega W, wnioskujemy, że $gw \in W^\perp$, czyli $W^\perp$ jest podprzestrzenią niezmienniczą. □

Uwaga: Powyższy lemat pokazuje, że odwzorowania $x \mapsto gx, g \in G$ w bazie ortonormalnej przestrzeni V reprezentują się przez macierze ortogonalne (w przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) lub unitarne (w przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). W szczególności, otrzymaliśmy dowód lematu, z którego korzystaliśmy w dowodzie twierdzenia Zassenhausa.

Niektóre operacje na reprezentacjach

Reprezentacja dualna do reprezentacji $\rho : G \to GL(V)$: jest to reprezentacja $\rho^* : G \to GL(V^*)$ określona przez $\rho^*(g) := (\rho(g^{-1}))^*$. Można też określić $\rho^*(g) := (\rho(g))^*$, ale to będzie antyreprezentacja.

Suma prosta reprezentacji $\rho_1 : G \to GL(V_1), \rho_2 : G \to GL(V_2)$: Jest to reprezentacja ρ grupy G w przestrzeni $V_1 \oplus V_2$ zadana przez $\rho(g) := (\rho_1(g), \rho_2(g))$. Jeśli $\rho_1(g), \rho_2(g)$ są reprezentowane przez macierze z $GL(n, \mathbb{K}), GL(m, \mathbb{K})$ odpowiednio, to $\rho(g)$ jest reprezentowana przez macierz

$$\begin{bmatrix} \rho_1(g) & 0 \\ 0 & \rho_2(g) \end{bmatrix}.$$

Iloczyn tensorowy reprezentacji $\rho_1 : G \to GL(V_1), \rho_2 : G \to GL(V_2)$: Jest to reprezentacja ρ grupy G w przestrzeni $V_1 \otimes V_2$ zadana przez $\rho(g) := \rho_1(g) \otimes \rho_2(g)$. Jeśli $\rho_1(g), \rho_2(g)$ są reprezentowane przez macierze $[\rho_1(g)] \in GL(n, \mathbb{K}), [\rho_2(g)] \in GL(m, \mathbb{K})$, to $\rho(g)$ jest reprezentowana przez macierz będącą iloczynem tensorowym tych macierzy.

Przypomnijmy, że, jeśli operator $A \in GL(V_1)$ jest reprezentowany przez macierz $[A] := A^i_j$ w bazie $r_1, \ldots, r_n$, czyli $Ar_j = A^i_j r_i$ (stosujemy konwencję Einsteina: sumujemy po jednakowym indeksach), a operator $B \in GL(V_2)$ jest reprezentowany przez macierz $[B] := B^k_l$ w bazie $s_1, \ldots, s_m$ (czyli $Bs_l = B^k_l l s_k$), to $A \otimes B(e_j \otimes e_l) := Ar_j \otimes Bs_l = A^i_j B^k_l r_i \otimes s_k$.

Innymi słowy, w bazie $r_i \otimes s_k, i = 1, \ldots, n, k \in 1, \ldots, m$, operator $A \otimes B$ jest reprezentowany przez macierz $A^i_j B^k_l$.

7 Elementarna teoria reprezentacji, cz. II

Literatura dodatkowa: [Ser88, Ada69]

Założenia: W tym rozdziale rozpatrujemy tylko skończone grupy G i ich skończeniewymiarowe reprezentacje w przestrzeniach wektorowych nad $\mathbb{C}$.

Charakter reprezentacji $\rho : G \to GL(V)$: Jest to funkcja $\chi_\rho : G \to \mathbb{C}$ zadana wzorem $\chi_\rho(g) := \mathrm{Tr}(\rho(g))$. Przypomnijmy, że $\mathrm{Tr}\, A$ oznacza *ślad* operatora liniowego działającego w przestrzeni liniowej. Jeśli $[A] := A^i_j$ jest macierzą reprezentującą operator A w jakiejkolwiek bazie, to $\mathrm{Tr}\, A$ obliczamy jako $\mathrm{Tr}[A] = A^i_i$ (kontynuujemy wykorzystanie konwencji Einsteina). Przy tym wynik nie zależy od wyboru bazy dzięki łatwo sprawdzalnej tożsamości $\mathrm{Tr}[A][B] = \mathrm{Tr}[B][A]$, z której w szczególności wynika, że $\mathrm{Tr}[B][A][B]^{-1} = \mathrm{Tr}[A]$ dla dowolnej macierzy niezdegenerowanej $[B]$.

Niektóre własności charakteru χ_ρ

LEMAT *1. $\chi_\rho(e) = \dim V$;*

2. $\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}\ \forall g \in G$;

3. $\chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g)\ \forall g, h \in G$.

Dowód: Ad. 1. $\chi_\rho(e) = \mathrm{Tr}\,\mathrm{Id}_V = \dim V$.

Ad. 2. Z istnienia niezmienniczego iloczynu skalarnego na V wynika, że wartości własne λ_i operatora $\rho(g)$ spełniają warunek $\overline{\lambda_i}\lambda_i = 1$ (istotnie, jeśli x_i jest odpowiednim wektorem własnym, to $(x_i|x_i) = (\rho(g)x_i|\rho(g)x_i) = (\lambda_i x_i|\lambda_i x_i) = \overline{\lambda_i}\lambda_i(x_i|x_i)$, skąd $\overline{\lambda_i}\lambda_i = 1$).

Niech $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, n = \dim V$, będą wartościami własnymi operatora $\rho(g)$ z uwzględnieniem krotności. Wtedy

$$\overline{\chi_\rho(g)} = \overline{\mathrm{Tr}\,\rho(g)} = \overline{\sum \lambda_i} = \sum \lambda_i^{-1} = \mathrm{Tr}(\rho(g)^{-1}) = \mathrm{Tr}(\rho(g^{-1})) = \chi_\rho(g^{-1}).$$

Ad. 3. $\chi_\rho(hgh^{-1}) = \mathrm{Tr}(\rho(h)\rho(g)\rho(h)^{-1}) = \mathrm{Tr}\,\rho(g) = \chi_\rho(g)$. □

Charakter a operacje nad reprezentacjami

LEMAT *Niech $\rho_1 : G \to GL(V_1), \rho_2 : G \to GL(V_2)$ będą dwiema reprezentacjami. Wtedy*

1. $\chi_{\rho_1^*} = \overline{\chi_{\rho_1}}$;

2. $\chi_{\rho_1 \oplus \rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$;

3. $\chi_{\rho_1 \otimes \rho_2} = \chi_{\rho_1} \cdot \chi_{\rho_2}$

Dowód - ćwiczenie

Operatory splatające i równoważność reprezentacji: Niech $\rho_1 : G \to GL(V_1), \rho_2 : G \to GL(V_2)$ będą dwiema reprezentacjami. Operatorem *splatającym* pomiędzy ρ_1 i ρ_2 nazywamy taki operator $F : V_1 \to V_2$, że następujący diagram jest przemienny dla dowolnego $g \in G$:

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\rho_1(g)} & V_1 \\ \downarrow F & & \downarrow F \\ V_2 & \xrightarrow{\rho_2(g)} & V_2. \end{array}$$

Przestrzeń operatorów splatających z V_1 do V_2 będziemy oznaczali $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$.

Mówimy, że reprezentacje ρ_1 i ρ_2 są *równoważne*[6], jeśli istnieje operator splatający będący izomorfizmem przestrzeni liniowych.

Uwaga: Reprezentacje równoważne mają jednakowe charaktery: $\rho_1(g) = F^{-1} \circ \rho_2(g) \circ F$, skąd $\mathrm{Tr}\,\rho_1(g) = \mathrm{Tr}\,\rho_2(g)$.

Lemat Schura

LEMAT *Niech $\rho_1 : G \to GL(V_1), \rho_2 : G \to GL(V_2)$ będą dwiema reprezentacjami* nieprzywiedlnymi *i niech $F : V_1 \to V_2$ będzie operatorem* splatającym. *Wtedy*

1. *Jeśli ρ_1 i ρ_2 nie są równoważne, to $F = 0$.*

2. *Jeśli $V_1 = V_2 =: V, \rho_1 = \rho_2$, to $F = \lambda\,\mathrm{Id}_V$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Dowód: Ad. 1. Niech $W_1 := \ker F \subset V_1$. Wtedy W_1 jest podprzestrzenią niezmienniczą względem reprezentacji ρ_1. Istotnie, jeśli $w \in W_1$, to $F\rho_1(g)w = \rho_2(g)Fw = 0$, skąd $\rho_1(g)w \in W_1$. Z nieprzywiedlności ρ_1 wynika, że $W_1 = V_1$ (koniec dowodu) lub $W_1 = \{0\}$, czyli F jest monomorfizmem.

Niech teraz $W_2 := \mathrm{im}\,F \subset V_2$. Okazuje się, że i W_2 jest podprzestrzenią niezmienniczą (względem ρ_2): $\rho_2(g)W_2 = \rho_2(g)FV_1 = F\rho_1(g)V_1 \subset W_2$. Znowu nieprzywiedlność implikuje, że $W_2 = \{0\}$ (koniec dowodu) lub $W_2 = V_2$. Ostatnia możliwość nie może zachodzić ze względu na to, że reprezentacje ρ_1, ρ_2 nie są równoważne.

Ad. 2. Niech λ pewna wartość własna operatora F. Połóżmy $F' := F - \lambda\,\mathrm{Id}_V$. Wtedy F' też jest operatorem splatającym (pomiędzy ρ i ρ, gdzie $\rho := \rho_1 = \rho_2$). Argumenty przytoczone w pierwszej części dowodu pozwalają wywnioskować, że $F' = 0$ (czyli $F = \lambda\,\mathrm{Id}_V$ – koniec dowodu) lub F' jest izomorfizmem. Ostatnia możliwość nie zachodzi, bo F' ma nietrywialne jądro (zawierające wektor własny odpowiadający wartości własnej λ). $\square$

Wnioskiem z lematu Schura jest następujący fakt: $\dim \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) = 0$ w przypadku, gdy ρ_1, ρ_2 nie są równoważne, oraz $\dim \mathrm{Hom}_G(V, V) = 1$.

Relacje ortogonalności dla charakterów: Rozważmy przestrzeń $\mathrm{Fun}(G, \mathbb{C})$ funkcji na G o wartościach zespolonych. Następujące parowanie

$$(\phi|\psi) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\phi(g)}\psi(g) \quad \phi, \psi \in \mathrm{Fun}(G, \mathbb{C})$$

(tutaj $|G|$ oznacza rząd, czyli ilość elementów grupy G) spełnia wszystkie aksjomaty iloczynu skalarnego (*Ćwiczenie*).

TWIERDZENIE *Niech $\rho_1 : G \to GL(V_1), \rho_2 : G \to GL(V_2)$ będą dwiema reprezentacjami. Wtedy*

$$(\chi_{\rho_1}|\chi_{\rho_2}) = \dim \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2).$$

W szczególności, charaktery reprezentacji nieprzywiedlnych tworzą układ ortonormalny.

Do dowodu tego twierdzenia będziemy potrzebowali następujący

[6] Por. definicję z Wykładu 2

Lemat *Niech $\rho : G \to GL(V)$ będzie reprezentacją. Połóżmy $P := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g) : V \to V$. Wtedy*

1. *Operator P jest projektorem, czyli $P^2 = P$.*

2. $\operatorname{im} P = V^G := \{x \in V \mid \rho(g)x = x \ \forall g \in G\}$.

Dowód: *Ad. 1.* $P^2 = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)(\frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\rho(h)) = \frac{1}{|G|^2}\sum_{g\in G}\sum_{h\in G}\rho(g)\rho(h) = \frac{1}{|G|^2}\sum_{g\in G}\sum_{h\in G}\rho(gh) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} P = P$.

Ad. 2. Jeśli $x \in \operatorname{im} P$, to $x = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)y$ dla pewnego $y \in V$ oraz $\rho(h)x = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(hg)y = Py = x$, czyli $\operatorname{im} P \subset V^G$. Odwrotnie, jeśli $X \in V$ jest punktem stałym reprezentacji ρ, to $Px = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)x = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} x = x$, skąd $x \in \operatorname{im} P$. $\square$

Dowód twierdzenia: Oznaczmy przez $\operatorname{Hom}(V_1, V_2)$ przestrzeń operatorów liniowych z V_1 w V_2 i zadajmy działanie grupy G na tej przestrzeni wzorem $(\rho(g)F)(x) := \rho_2(g)(F(\rho_1(g^{-1})x)$ (*Ćwiczenie:* sprawdzić, że w ten sposób otrzymujemy reprezentację grupy G w przestrzeni $\operatorname{Hom}(V_1, V_2)$). Element $F \in \operatorname{Hom}(V_1, V_2)$ jest punktem stałym tego działania, jeśli i tylko jeśli dla każdego $g \in G$ natępujący diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[d, "F"] & V_1 \arrow[l, "\rho_1(g^{-1})"'] \arrow[d, "F"] \\ V_2 \arrow[r, "\rho_2(g)"] & V_2, \end{tikzcd}$$

czyli F jest operatorem splatającym. Innymi słowy $\operatorname{Hom}(V_1, V_2)^G = \operatorname{Hom}_G(V_1, V_2)$.

Rozważmy odwzorowanie $\alpha : V_1^* \otimes V_2 \to \operatorname{Hom}(V_1, V_2)$ zadane wzorem $(\alpha(\gamma \otimes v_2))v_1 := \gamma(v_1)v_2, \gamma \in V_1^*, v_i \in V_i$. Jest to izomorfizm przestrzeni liniowych, przy czym działanie ρ przechodzi na następujące: $\tilde{\rho}(g)(\gamma \otimes v_2) := \rho_1^*(g)\gamma \otimes \rho_2(g)v_2$, gdzie $(\rho_1^*(g)\gamma)(v_1) = \gamma(\rho_1(g^{-1})v_1)$ (działanie dualne do ρ_1).

Reprezentacje ρ i $\tilde{\rho}$ są równoważne, mamy więc $\chi_\rho = \chi_{\tilde{\rho}}$. Ostatecznie mamy

$$(\chi_1|\chi_2) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi_1(g)}\chi_2(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\tilde{\rho}} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\rho = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\operatorname{Tr}\rho(g) = \operatorname{Tr} P = \dim \operatorname{im} P =$$

$$\dim \operatorname{Hom}_G(V_1, V_2).$$

Tutaj skorzystaliśmy z faktu, że ślad projektora jest równy wymiarowi jego obrazu (istotnie, każdy rzut jest operatorem diagonalizowalnym z wartościami własnymi równymi $1, 0$, przy czym wymiar obrazu jest równy krotności wartości własnej 1). $\square$

8 Elementarna teoria reprezentacji, cz. III

Założenia: Jak i w poprzednim, w tym rozdziale rozpatrujemy tylko skończone grupy G i ich skończeniewymiarowe reprezentacje w przestrzeniach wektorowych nad $\mathbb{C}$.

Charakter reprezentacji wyznacza ją z dokładnością do równoważności:

Twierdzenie 1. *Niech $\rho : G \to GL(V)$ będzie reprezentacją, a $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ jej rozkładem na podreprezentacje nieprzywiedlne*[7]*. Jeśli $\rho_0 : G \to W$ jest pewną reprezentacją nieprzywiedlną, to ilość składowych W_i równoważnych z W jest równa $(\chi_\rho|\chi_{\rho_0})$ (liczbę tę nazywamy* krotnością wchodzenia *reprezentacji W w reprezentację V).*

2. *Reprezentacje o tych samych charakterach są równoważne.*

Dowód: Ad. 1. Na mocy twierdzeń z poprzedniego wykładu mamy $\chi_\rho = \chi_1 + \cdots + \chi_k$, gdzie χ_i jest charakterem reprezentacji W_i, oraz

$$(\chi_\rho|\chi_{\rho_0}) = (\chi_1|\chi_{\rho_0}) + \cdots + (\chi_k|\chi_{\rho_0}) = \dim \mathrm{Hom}_G(W_1, W) + \cdots + \dim \mathrm{Hom}_G(W_k, W).$$

Lemat Schura, z kolei, mówi, że w ostatniej sumie „przeżywają" tylko te człony, które odpowiadają składowym W_i równoważnym z W.

Ad. 2. Niech $\rho_1 : G \to GL(V_1), \rho_2 : G \to GL(V_2)$ będą dwiema reprezentacjami z $\chi_{\rho_1} = \chi_{\rho_2}$. Wtedy dowolna nieprzywiedlna reprezentacja $\rho : G \to GL(W)$ wchodzi w V_1 i V_2 z jedna i tę samą krotnością, równą $(\chi_\rho|\chi_{\rho_1}) = (\chi_\rho|\chi_{\rho_2})$. □

Kryterium nieprzywiedlności reprezentacji:

Twierdzenie *Reprezentacja $\rho : G \to GL(V)$ jest nieprzywiedlna wtedy i tylko wtedy, gdy $(\chi_\rho|\chi_\rho) = 1$.*

Dowód: Jeśli V jest nieprzywiedlna, to „wchodzi w siebie" z krotnością 1. Odwrotnie, niech ρ będzie dowolną reprezentacją, a $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ jej rozkładem na podreprezentacje nieprzywiedlne. Wtedy $(\chi_\rho|\chi_\rho) = \sum_{ij}(\chi_i|\chi_j)$. Z relacji ortogonalności wnioskujemy, że, jeśli ta suma jest równa 1, to $k = 1$.

Ile jest reprezentacji nieprzywiedlnych? *Klasą sprzężoności* nazywamy orbitę działania $G \ni a \mapsto A_a \in \mathrm{Aut}(G)$ grupy G na sobie poprzez automorfizmy wewnętrzne. Innymi słowy, dwa elementy $a, b \in G$ należą do jednej klasy spężoności wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $g \in G$ taki, że $a = gbg^{-1}$.

Funkcją klas nazywamy funkcję $F : G \to \mathbb{C}$ *stałą* na klasach sprzężoności. Funkcje klas tworzą przestzeń wektrową, którą będziemy oznaczali prez $\mathrm{Cl}(G)$. Z poprzedniego wykładu wiemy, że każdy charakter reprezentacji jest funkcją klas. Okazuje się, że charaktery prawie wyczerpują funkcje klas. Dokładniej, ma miejsce

Twierdzenie 1. *Charaktery reprezentacji nieprzywiedlnych tworzą bazę ortonormalną przestrzeni $\mathrm{Cl}(G)$.*

[7]Taki rozkład jest dalece niejednoznaczny. Np. dla reprezentacji grupy $G := \mathbb{C}^* = (\mathbb{C}_{\neq 0}, \cdot)$ w przestrzeni $\mathbb{C}^2$ zadanej wzorem $\mathbb{C}^* \ni \lambda \mapsto \lambda I \in GL(2, \mathbb{C})$ każda podprzestrzeń 1-wymiarowa będzie podreprezentacją nieprzywiedlna. Czyli $\mathbb{C}^2$ można rozłożyć na nieprzywiedlne na nieskończenie wiele sposobów.

2. *Ilość nierównoważnych reprezentacji nieprzywiedlnych grupy G jest równa liczbie klas sprzężoności.*

Dowód: Ad. 2. Z punktu 1 wynika, że liczba nierównoważnych reprezentacji nieprzywiedlnych jest równa $\dim \mathrm{Cl}(G)$. Z drugiej strony funkcja klas wyznacza się jednoznacznie przez swoje wartości na tych klasach, czyli $\dim \mathrm{Cl}(G)$ jest równe liczbie klas sprzężoności. □

Żeby udowodnić punkt 1 musimy udowodnić pewny lemat i omówić tzw. *reprezentację regularną* grupy.

LEMAT *Niech* $\rho : G \to GL(V)$ *będzie pewną reprezentacją, a* $F \in \mathrm{Cl}(G)$. *Wtedy:*

1. *Operator* $L(\rho, F) : \sum_{g\in G} \overline{F(g)}\rho(g) : V \to V$ *jest operatorem splatającym (pomiędzy* ρ *i* ρ*);*

2. *W przypadku, gdy* ρ *jest nieprzywiedlna,* $L(\rho, F) = \lambda \,\mathrm{Id}_V$ *oraz* $\lambda = \frac{|G|}{\dim V}(F|\chi_\rho)$.

Dowód: Ad. 1. Mamy $\rho(h)L(\rho, F)\rho(h)^{-1} = \sum_{g\in G} \overline{F(g)}\rho(h)\rho(g)\rho(h)^{-1} = \sum_{g\in G} \overline{F(g)}\rho(hgh^{-1}) = \sum_{g\in G} \overline{F(g)}\rho(g) = L(\rho, F)$, więc $\rho(h)L(\rho, F) = L(\rho, F)\rho(h)$ dla dowolnego $h \in G$, czyli L jest operatorem splatającym.

Ad. 2. Z lematu Schura wnioskujemy, że $L(\rho, F) = \lambda \,\mathrm{Id}_V$. Obliczmy ślad tego operatora. Z jednej strony $\mathrm{Tr}(\lambda \,\mathrm{Id}_V) = \lambda \dim V$, z innej zaś

$$\mathrm{Tr}\, L(\rho, F) = \sum_{g\in G} \overline{F(g)}\, \mathrm{Tr}\, \rho(g) = \sum_{g\in G} \overline{F(g)}\chi_\rho(g) = |G|(F|\chi_\rho).\square$$

Reprezentacja regularna grupy G**:** Oznaczmy elementy grupy G przez $e_1, \ldots, e_n$, przy czym niech $e_1 := e$. Wtedy G działa na $\{e_1, \ldots, e_n\}$ z lewej strony przez lewe mnożenie: $e_i \mapsto ge_i$. Oznaczmy przez V_{reg} przestrzeń wektorową rozpiętą przez wektory $e_1, \ldots, e_n$ orzaz przedłużmy powyższe działanie do liniowego działania na V_{reg} według liniowości (czyli $g(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n) := \alpha_1 ge_1 + \cdots + \alpha_n ge_n$). Otrzymaną reprezentację nazywamy (lewą) *regularną* reprezentacją grupy G.

Dowód punktu 1 twierdzenia: Z relacji ortogonalności wiemy, że charaktery reprezentacji nieprzywiedlnych tworzą układ ortonormalny. Czyli, do udowodnienia zostaje tylko *zupełność* tego układu. Innymi słowy, musimy dowieść, że nie istnieje funkcji klas ortogonalnej do wszystkich charakterów reprezentacji nieprzywiedlnych.

Otóż niech F taka funkcja. Wtedy, według powyższego lematu, operator $L(\rho, F)$ jest zerowy dla dowolnej nieprzywiedlnej reprezentacji ρ. Ponieważ każda reprezentacja rozkłada się na nieprzywiedlne, mamy też $L(\rho, F) = 0$ dla dowolnej reprezentacji, w szczególności dla reprezentacji regularnej $\rho = \rho_{reg}$. Stąd

$$0 = L(\rho_{reg}, F)e_1 = \sum_{g\in G} \overline{F(g)} ge_1.$$

Ponieważ wektory $\{ge_1\}_{g\in G}$ tworzą układ liniowo niezależny w V_{reg}, mamy $\overline{F(g)} = 0$ dla każdego $g \in G$, czyli $F \equiv 0$. □

Rozkład reprezentacji regularnej na nieprzywiedlne:

Twierdzenie *1. Każda reprezentacja nieprzywiedlna $\rho_i : G \to GL(V_i)$ wchodzi w V_{reg} z krotnością równą swojemu wymiarowi $n_i := \dim V_i$.*

2. Wymiary n_i spełniają tożsamość.

$$\sum_i n_i^2 = |G|.$$

Dowód: Ad. 1. Niech $g \neq e$, wtedy dla każdego $h \in G$ mamy $gh \neq h$. Czyli dla każdego i wektor $\rho_{reg}(g)e_i$ w rozkładzie po bazie $e_1, \dots, e_n$ nie ma nietrywialnego składnika proporcjonalnego do e_i. Stąd wnioskujemy, że wszystkie wyrazy diagonalne macierzy operatora $\rho_{reg}(g)$ w bazie $e_1, \dots, e_n$ są zerowe i $\mathrm{Tr}\, \rho_{reg}(g) = \chi_{\rho_{reg}}(g) = 0$.

Z kolei $\chi_{\rho_{reg}}(e) = \mathrm{Tr}\, \mathrm{Id}_{V_{reg}} = |G|$.

Stosując twierdzenie o krotności wchodzenia, mamy

$$(\chi_{\rho_{reg}} | \chi_{\rho_i}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_{\rho_{reg}}(g)} \chi_{\rho_i}(g) = \frac{1}{|G|} \overline{\chi_{\rho_{reg}}(e)} \chi_{\rho_i}(e) = \frac{1}{|G|} |G| \chi_{\rho_i}(e) = n_i.$$

Ad. 2. Z punktu 1 widzimy, że $\chi_{\rho_{reg}} = \sum_i n_i \chi_{\rho_i}$. Obliczając to wyrażenie na elemencie neutralnym e, otrzymujemy szukaną tożsamość. □

Reprezentacje nieprzywiedlne $\rho : G \to GL(V)$ **grup abelowych:** Są jednowymiarowe. Istotnie, ponieważ $gh = hg$, mamy $\rho(g)\rho(h) = \rho(h)\rho(g)$ dal wszystkich $g, h \in G$, skąd operator $\rho(h)$ jest operatorem splatającym dla ρ. Według lematu Schura ma być postaci $\rho(h) = \lambda(h)\, \mathrm{Id}_V$ przy czym $\lambda(h_1 h_2) = \lambda(h_1)\lambda(h_2)$, czyli $\lambda : G \to \mathbb{C}^* = GL(1, \mathbb{C})$ jest homomorfizmem. Jasne, że reprezentacja $h \to \lambda(h)\, \mathrm{Id}_V$ jest nieprzywiedlna wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim V = 1$ (lub 0, co nie rozpatrujemy, bo jest trywialne).

Zauważmy, że reprezentacja jednowymiarowa $G \to GL(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ każdej grupy pokrywa się ze swoim charakterem $\chi_\rho : G \to \mathbb{C}$.

Przykład: Znajdźmy wszystkie nieprzywiedlne reprezentacje grupy cyklicznej $C_n = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$. Wiemy, że są jednowymiarowe i, ponieważ wymiar reprezentacji regularnej jest n, ma ich być n. Każda taka reprezentacja ma postać $e \mapsto 1, a \mapsto \lambda = \chi(a) \in \mathbb{C}^*, a^k = \lambda^k, k = 2, \dots, n-1$, przy czym $\lambda^n = 1$. Stąd λ musi być jednym z pierwiastków n-go stopnia z jedynki $\{1, \epsilon, \epsilon^2, \dots, \epsilon^{n-1}\}, \epsilon = e^{2i\pi/n}$. Tabela charakterów dla $n = 4$ ma postać

	e	a	a^2	a^3
χ_0	1	1	1	1
χ_1	1	ϵ	ϵ^2	ϵ^3
χ_2	1	ϵ^2	1	ϵ^2
χ_3	1	ϵ^3	ϵ^2	ϵ

Przykład: Grupa $D_2 \cong V_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Ogólnie grupa D_n symetrii n-kąta foremnego składa się z elementów postaci $e, a, a^2, \dots, a^{n-1}$, gdzie a obrót płaszczyzny o kąt $2\pi/n$ oraz elementów postaci $s, sa, sa^2, \dots, sa^{n-1}$, gdzie s jakiekolwiek odbicie zachowujące wielokąt. Elementy te spełniają następujące relacje: $a^n = e, s^2 = e, sa^k s = a^{-k}$. Grupa D_n jest iloczynem półprostym $C_2 \times fC_n$. Tutaj $C_2 := \{e, s\}, f : C_2 \to \mathrm{Aut} C_n$ jest dane wzorem $f(e) = \mathrm{Id}, f(s)a^k = a^{-k}$.

W szczególności, D_2, grupa symetrii 2-kąta foremnego (jak śmiesznie to nie brzmi), składa się z e, a, s, sa. Ponieważ $sas = a^{-1} = a$ i $s^{-1} = s$, mamy $sa = as$ oraz $asa = s = saa, ssa = a = sas$, czyli jest przemienna. Ma więc mieć 4 jednowymiarowe reprezentacje nieprzywiedlne. Każdy z elementów g grupy jest inwolucją, czyli $g^2 = e$, skąd odpowiadająca mu 1×1-macierz $\rho(g)$ musi być równa ± 1. Ponadto $\rho(e) = 1$. Łatwo się przekonać, że tylko następujące 4 wektory spełnieją te wymogi i tworzą układ ortonormalny:

	e	a	s	sa
χ_0	1	1	1	1
χ_1	1	-1	1	-1
χ_2	1	-1	-1	1
χ_3	1	1	-1	-1

Komutant grupy i reprezentacje: *Komutantem* G' grupy G nazywamy najmniejszą podgrupę normalną $G' \subset G$ taką, że grupa ilorazowa G/G' jest abelowa. Jeśli $\rho' : G/G' \to GL(V)$ jest reprezentacją nieprzywiedlną grupy G/G' (V musi być 1-wymiarowe), to $\rho' \circ \pi$, gdzie $\pi : G \to G/G'$ jest rzutem naturalnym, jest nieprzywiedlną reprezentacją grupy G.

PRYKŁAD: Niech $G := D_3$. Wtedy $G' = C_3 = \{e, a, a^2\}$ a $G/G' \cong C_2$. Klasy sprzężoności są następujące $\{e\}, \{a, a^2\}, \{s, sa, sa^2\}$. Grupa G ma 2 reprezentacje nieprzywiedlne 1-wymiarowe pochodzące z reprezentacji $G/G' = C_2$. Oto ich charaktery

	e	a	a^2	s	sa	sa^2
χ_0	1	1	1	1	1	1
χ_1	1	1	1	-1	-1	-1

Reprezentacja regularna jest 6-wymiarowa, więc mamy dwie możliwości: albo jeszcze 4 reprezentacje 1-wymiarowe, albo jedna reprezentacja 2-wymiarowa (wchodząca z krotnością 2). Okazuje się, że zachodzi druga możliwość: rozważmy naturalną reprezentację G na $\mathbb{R}^2$ daną wzorami $a \mapsto \begin{pmatrix} \cos 2\pi/3 & -\sin 2\pi/3 \\ \sin 2\pi/3 & \cos 2\pi/3 \end{pmatrix}, s \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ i zinterpretujmy ją jako reprezentację w $\mathbb{C}^2$. Tabelka uzupełni się do następującej:

	e	a	a^2	s	sa	sa^2
χ_0	1	1	1	1	1	1
χ_1	1	1	1	-1	-1	-1
χ_2	2	-1	-1	0	0	0

Ponieważ $(\chi_2|\chi_2) = 1$, odpowiednia reprezentacja jest nieprzywiedlna.

PRYKŁAD: Niech $G := D_4$. Wtedy $G' = C_2 = \{e, a^2\}$ a $G/G' \cong D_2$. Istotnie, $sa^2s = a^2, (sa)a^2(sa)^{-1} = (sa)a^2a^3s = sa^2s = a^2, (sa^2)a^2(sa^2)^{-1} = sa^2a^2a^2s = a^2, (sa^3)a^2(sa^3)^{-1} = sa^3a^2as = a^2$, czyli G' jest normalna. Oto odpowiednie warstwy i ich tabelka mnożenia:

	$\{e, a^2\}$	$\{a, a^3\}$	$\{s, sa^2\}$	$\{sa, sa^3\}$
$\{e, a^2\}$	$\{e, a^2\}$	$\{a, a^3\}$	$\{s, sa^2\}$	$\{sa, sa^3\}$
$\{a, a^3\}$	$\{a, a^3\}$	$\{e, a^2\}$	$\{sa, sa^3\}$	$\{s, sa^2\}$
$\{s, sa^2\}$	$\{s, sa^2\}$	$\{sa, sa^3\}$	$\{e, a^2\}$	$\{a, a^3\}$
$\{sa, sa^3\}$	$\{sa, sa^3\}$	$\{s, sa^2\}$	$\{a, a^3\}$	$\{e, a^2\}$

Stąd widzimy izomorfizm $G/G' \cong D_2$. Klasy sprzężoności są następujące: $\{e\}, \{a^2\}, \{a, a^3\}$, $\{s, sa^2\}, \{sa, sa^3\}$. Grupa G ma 4 reprezentacje nieprzywiedlne 1-wymiarowe pochodzące z reprezentacji $G/G' = D_2$ oraz jedną reprezentację nieprzywiedlną 2-wymiarową pochodzącą z reprezentacji naturalnej na $\mathbb{R}^2$: $a \mapsto \begin{pmatrix} \cos 2\pi/4 & -\sin 2\pi/4 \\ \sin 2\pi/4 & \cos 2\pi/4 \end{pmatrix}$, $s \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. A oto tabela charakterów:

	e	a	a^2	a^3	s	sa	sa^2	sa^3
χ_0	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
χ_2	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
χ_3	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_4	2	0	-2	0	0	0	0	0

9 Reprezentacje indukowane, cz. I

Literatura dodatkowa: [Ser88, CR88]

Dygresja algebraiczna:

Pierścień: Jest to grupa abelowa $(A,+)$ (odpowiednie działanie nazywamy dodawaniem) wyposażona w dodatkowe działanie $(a,b) \mapsto a \cdot b$ (nazywane mnożeniem), które spełnia następujące aksjomaty:

1. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ $\forall a,b,c \in A$ (mnożenie jest łączne);
2. $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ $\forall a,b,c \in A$.

Mówimy, że $(A,+,\cdot)$ jest pierścieniem z jedynką, jeśli istnieje element $1 \in A$ będący elementem neutralnym względem mnożenia, tj. $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ $\forall a \in A$.

Przykład: Pierścień $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych.

Przykład: Każde ciało $\mathbb{K}$ jest pierścieniem.

Przykład: Zbiór $\mathrm{Fun}(X,\mathbb{K})$ funkcji na dowolnym zbiorze X o wartościach w dowolnym ciele $\mathbb{K}$ jest piersćieniem z jedynką (1 jest funkcja stała, równa jeden). Jest to przykład pierścienia *przemiennego* nie będącego ciałem (o ile zbiór X jest więcej niż jednoelementowy).

Przykład: Zbiór $\mathrm{Mat}(k,\mathbb{K})$ macierzy $k \times k$ o wyrazach w ciele $\mathbb{K}$ jest pierścieniem z jedynką $(1 = I)$. Jest to przykład pierścienia *nieprzemiennego* (o ile $k > 1$).

Przykład: Zbiór $C_0(\mathbb{R}^k,\mathbb{R})$ funkcji *ciagłych* na $\mathbb{R}^k$ o wartościach w $\mathbb{R}$ znikających w zerze jest przykładem pierścienia bez jedynki.

Lewy moduł nad pierścieniem A z jedynką: Jest to grupa abelowa $(M,+)$ wyposażona w działanie $\nu : A \times M \to M$ (zapis skrócony $\nu(a,m) := am, a \in A, m \in M$), które spełnia następujące aksjomaty:

1. $a(m+n) = am + an$ $\forall a \in A, m,n \in M$;
2. $(a+b)m = am + bm$ $\forall a,b \in A, m \in M$;
3. $(a \cdot b)m = a(bm)$ $\forall a,b \in A, m \in M$;
4. $1m = m$ $\forall m \in M$.

Uwaga: Analogicznie definiujemy pojęcie *prawego* modułu nad A. Jeśli pierścień jest przemienny, każdy lewy moduł może być przekształcony w prawy $ma := am$ i odwrotnie.

Przykład: Niech $A := \mathbb{K}$ będzie ciałem, a M przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$. Wtedy M jest lewym (i prawym) $\mathbb{K}$-modułem.

Przykład: Niech $A := \mathrm{Fun}(X,\mathbb{K})$, a $M := \mathrm{Fun}(X,\mathbb{K}^k)$ będzie zbiorem funkcji na X o wartościach w $\mathbb{K}^k$. Wtedy M jest lewym modułem nad A względem naturalnego mnożenia wektor-funkcji przez funkcję.

Przykład: Niech $A := \mathrm{Mat}(k,\mathbb{K})$, a $M := \mathbb{K}^k$. Wtedy M jest lewym modułem nad A względem naturalnego działania macierzy na wektory kolumny.

Przykład: Niech $M := A$ i $ab := a \cdot b$. Wtedy M jest modułem nad sobą. Ogólniej, niech $M := A \times \cdots \times A$ będzie iloczynem prostym grup $(A, +)$. Wprowadzając działanie $a(a_1, \ldots, a_k) := (a \cdot a_1, \ldots, a \cdot a_k)$ otrzymujemy lewy A-moduł A^k.

Przykład: Każda grupa abelowa $(H, +)$ jest lewym modułem nad $\mathbb{Z}$. Działanie zadajemy tak: $nh := h + \cdots + h$ (n razy). Odwrotnie, każdy $\mathbb{Z}$-moduł jest poprostu grupą abelową.

Morfizm modułow N i M nad A: Jest to homomorfizm $f : M \to N$ grup $(M, +), (N, +)$ „respektujący" działanie A, czyli taki, że $f(am) = af(m), a \in A, m \in M$. *Izomorfizmem* nazywamy morfizm będący bijekcją (odwrotność jest automatycznie morfizmem - *Ćwiczenie*).

Iloczyn tensorowy modułów M i N nad A: Niech N będzie *lewym*, a M *prawym* modułem nad A. Niech H będzie dowolną grupą abelową oraz $f : M \times N \to H$ będzie homomorfizmem grup o własnościach 1) $f(m_1 + m_2, n) = f(m_1, n) + f(m_2, n)$ $\forall m_1, m_2 \in M, n \in N$; 2) $f(m, n_1 + n_2) = f(m, n_1) + f(m, n_2)$ $\forall m \in M, n_1, n_2 \in N$; 3) $f(ma, n) = f(m, an)$ $\forall m \in M, n \in N, a \in A$. Wtedy mówimy, że f jest *zbalansowany.*

Konstrukcja: Niech $F(M, N)$ oznacza zbiór formalnych skończonych kombinacji liniowych elementów z $M \times N$ o współczynnikach całkowitych. Jest to $\mathbb{Z}$-moduł, czyli grupa abelowa. Przez $F_0(M, N)$ oznaczamy podgrupę generowaną przez elementy postaci $(m_1 + m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n), (m, n_1 + n_2) - (m, n_1) + (m, n_2), (ma, n) - (m, an)$. Połóżmy $M \otimes_A N := F(M, N)/F_0(M, N)$ oraz określmy $\pi : M \times N \to M \otimes_A N$ wzorem $\pi(m, n) =: m \otimes n := (m, n) + F_0(M, N)$.

Twierdzenie 1. *Kanoniczne odwzorowanie $\pi : M \times N \to M \otimes_A N$ jest zbalansowanym homomorfizmem grup.*

2. *Dla dowolnej grupy abelowej H oraz homomorfizmu zbalansowanego $f : M \times N \to H$ istnieje jedyny homomorfizm grup $M \otimes_A N \to H$ taki, że następujący diagram jest przemienny:*

$$\begin{tikzcd} M \otimes_A N \arrow[dr] & \\ M \times N \arrow[u, "\pi"] \arrow[r, "f"] & H. \end{tikzcd}$$

3. *Jeśli dodatkowo M jest* lewym *modułem nad pierścieniem A', to $M \otimes_A N$ też jest lewym A' modułem (działanie zadajemy tak: $a'(m \otimes n) := (a'm) \otimes n$).*

Dowod - Ćwiczenie

Algebra nad ciałem $\mathbb{K}$: jest to pierścień $(A, +, \cdot)$ wyposażony w dodatkowe działanie $\mathbb{K} \times A \to A$ (mnożenie przez skalary) takie, że 1) $(A, +)$ wraz z tym działaniem jest przestrzenią wektorową; 2) $\alpha(a \cdot b) = (\alpha a) \cdot b = a \cdot (\alpha b)$ $\forall \alpha \in \mathbb{K}, a, b \in A$.

Przykład: Wszystkie powyższe przykłady pierścieni oprócz $\mathbb{Z}$ są jednocześnie przykładami algebr.

Lewy moduł nad algebrą A z jedynką: Jest to lewy moduł M nad pierścieniem $(A, +, \cdot)$ wyposażony w dodatkową strukturę przestrzeni wektorowej nad $\mathbb{K}$, przy czym $(\alpha a)m = a(\alpha m)$ $\forall \alpha \in \mathbb{K}, a \in A, m \in M$.

Przykład: Wszystkie powyższe przykłady modułów oprócz modułów nad $\mathbb{Z}$ są jednocześnie przykładami modułów nad algebrami.

Algebra grupowa $\mathbb{C}[G]$ grupy skończonej G: Jest to przestrzeń wektorowa $V_{reg} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{e_1, \ldots, e_n\}$ reprezentacji regularnej, w której zadane jest naturalne mnożenie: $(\alpha_1 e_1 + \cdots \alpha_n e_n) \cdot (\beta_1 e_1 + \cdots \beta_n e_n) := \sum_{ij} \alpha_i \beta_j e_i \cdot e_j$. Algebra $\mathbb{C}[G]$ jest algebrą z jedynką $(1 = e_1 = e)$.

Uwaga: Inne spojrzenie na algebrę grupową (które jest bardziej stosowne pod kątem uogólnienia na grupy nieskończone) jest następujące. Rozważmy zbiór $\mathrm{Fun}(G, \mathbb{C})$ funkcji na G o wartościach w $\mathbb{C}$ i zadajmy w nim mnożenie (splot funkcji) następującym wzorem:

$$F * S(g) := \sum_{h \in G} F(gh^{-1}) S(h).$$

Niech E_i oznacza funkcję zadaną wzorem $E_i(e_j) = \delta_{ij}$ i niech $e_i \cdot e_j = e_k$. Wtedy $E_i * E_j(e_r) = \sum_{l=1}^{n} E_i(e_r e_l^{-1}) E_j(e_l) = E_i(e_r e_j^{-1}) = \begin{cases} 1 \text{ jeśli } e_i e_j = e_r \\ 0 \text{ jeśli } e_i e_j \neq e_r \end{cases} = E_k(e_r)$. Stąd $E_i * E_j = E_k \Leftrightarrow e_i \cdot e_j = e_k$, czyli widzimy izomorfizm algebr $(\mathbb{C}[G], \cdot)$ i $(\mathrm{Fun}(G, \mathbb{C}), *)$.

Reprezentacje G = lewe $\mathbb{C}[G]$-moduły: Niech V będzie przestrenią wektorową nad $\mathbb{C}$, w której liniowo działa grupa skończona G. Wtedy V jest lewym modułem nad $\mathbb{C}[G]$: $(\alpha_1 e_1 + \cdots \alpha_n e_n)x := \alpha_1 e_1 x + \cdots \alpha_n e_n x$. Łatwo sprawdzić, że aksjomaty działania implikują aksjomaty modułu. Odwrotnie, jeśli V jest lewym $\mathbb{C}[G]$-modułem, ograniczając się do działania elementów bazowych $e_1, \ldots, e_n$ otrzymujemy rprezentacje grupy G w V.

Uwaga: Operatory splatające pomiędzy dwiema reprezentacjami V_1 i V_2 odpowiadają morfizmom $\mathbb{C}[G]$-modułów (*Ćwiczenie:* sprawdzić).

10 Reprezentacje indukowane, cz. II

Literatura dodatkowa: [Ser88, CR88]

Reprezentacje indukowane: Niech $H \subset G$ będzie podgrupą grupy skończonej G i niech $W \subset V$ będą takimi przestrzeniami wektorowymi, że G działa liniowo na V (czyli mamy homomorfizm $\rho : G \to GL(V)$) i

$$HW \subset W \tag{4}$$

(czyli $\rho(H)W \subset W$). Łatwo się przekonać, że podprzestrzeń $sW \subset V$ zależy tylko od prawej warstwy $sH = \{sh \mid h \in H\}$ elementu $s \in G$ ze względu na podgrupę H, a nie zależy od wyboru reprezentanta s danej warstwy. Istotnie, $(sh)W = s(hW) = sW$.

Niech $R \subset G$ oznacza zbiór reprezentantów warstw (każda warstwa jest reprezentowana jedynym reprezentantem[8]). Suma $\sum_{s\in G} sW = \sum_{r\in R} rW \subset V$ jest podprzestrzenią niezmienniczą ze względu na działanie grupy G.

Jeśli

$$\sum_{r\in R} rW = V \tag{5}$$

i , ponadto, jest to suma prosta, czyli

$$rW \cap r'W = \{0\}, \tag{6}$$

gdzie r, r' reprezentują różne warstwy, mówimy, że reprezentacja V grupy G jest *indukowana* przez reprezentację W podgrupy H.

LEMAT *Istnieje jedyna (z dokładnością do równoważności) reprezentacja grupy G indukowana przez zadaną reprezentację podgrupy H w przestrzeni W.*

Dowód: Rozważmy reprezentację W jako lewy $\mathbb{C}[H]$-moduł, a algebrę grupową $\mathbb{C}[G]$ jako prawy $\mathbb{C}[H]$-moduł (ostatnie jest możliwe, ponieważ każda algebra A może być rozpatrywana jako lewy i prawy moduł nad dowolną swoją podalgebrą $B \subset A$). Teraz możemy rozpatrzeć grupę abelową $V := \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$. Co więcej, można je rozpatrywać jako lewy $\mathbb{C}[G]$-moduł, czyli reprezentację grupy G.

Warunek (4) dla tej reprezentacji V wynika z tego, że przestrzeń W jest włożona w V jako $\mathbb{C}[H]$-podmoduł[9]. Włożenie takie realizuje się wzorem $W \ni w \mapsto 1 \otimes w \in 1 \otimes W = \{1 \otimes w \mid w \in W\} \subset V$. Istotnie, dla $h \in \mathbb{C}[H], w \in W$ mamy $h(1 \otimes w) = (h1) \otimes w = (1h) \otimes w = 1 \otimes hw$, czyli włożenie $w \mapsto 1 \otimes w$ jest morfizmem $\mathbb{C}[H]$-modułów.

Warunek (5) z kolei jest wnioskiem z faktu, że grupa G jest sumą teoretyko-mnogościową warstw sH. Istotnie, ostatni warunek oznacza rozkład $\mathbb{C}[G] = \sum_{r\in R} \mathbb{C}[rH]$, gdzie oznaczyliśmy przez $\mathbb{C}[rH]$ powłokę liniową (nad $\mathbb{C}$) warstwy rH, a sumę rozumiemy w sensie teorii przestrzeni liniowych. Powyższy rozkład daje rozkład $V = \sum_{r\in R} \mathbb{C}[rH] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W = \sum_{r\in R} r\mathbb{C}[H] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W = \sum_{r\in R} r \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$.

Wreszcie zauważmy, że różne warstwy mają puste przecięcie, co oznacza, że w powyższych wzorach możemy zastąpić znak sumy znakiem sumy prostej, co daje warunek (6).

---

[8] Umówmy się, ze warstwa H jest reprezentowana przez e

[9] Podmodułem modułu V nad algebrą A nazywamy podgrupę $W \subset V$ stabilną ze względu na działanie A, czyli taką, że $AW \subset W$

Zostało pokazać jednoznaczność. W tym celu rozważmy dowolną G-reprezentację V' indukowaną przez H-reprezentację W i skorzystajmy z rozkładu $V' = \bigoplus_{r\in R} rW$. Odwzorowanie $F : V' \to V$ zadajemy wzorem $rw \mapsto r \otimes w$ dla $w \in W, r \in R$. Jest to liniowa (nad $\mathbb{C}$) injekcja, a obliczenie wymiarów V i V' pokazuje, że jest to też i bijekcja. Łatwo widać też, że jest to morfizm $\mathbb{C}[G]$-modułów. □

Charakter reprezentacji $\rho : G \to GL(V)$ indukowanej przez H-reprezentację W:

TWIERDZENIE *Niech $\chi_W : H \to \mathbb{C}$ będzie charakterem reprezentacji W. Wtedy*

$$\chi_\rho(x) = \frac{1}{|H|} \sum_{g\in G, g^{-1}xg\in H} \chi_W(g^{-1}xg).$$

Dowód: Każdy element $x \in G$ wyznacza automorfizm $\rho(x)$ przestrzeni $V = \bigoplus_{r\in R} rW$, który przestawia podprzestrzenie rW. Dla każdego $r \in R$ wybierzemy bazę $\{e(r)_1, \ldots, e(r)_w\}$ przestrzeni rW taką, że $\{e(r)_1, \ldots, e(r)_w\}_{r\in R}$ jest bazą V. Na diagonali macierzy automorfizmu $\rho(x)$ w tej bazie niezerowe wyrazy będą odpowiadały tylko tym elementom $e(r)_i$, dla których $xrW = rW$, czyli $xr \in rH$, czyli $r^{-1}xr \in H$.

Stąd $\operatorname{Tr} \rho(x) = \sum_{r\in R, r^{-1}xr\in H} \operatorname{Tr}(\rho(x)|_{rW})$. Z innej strony, przemienny diagram

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\rho(r^{-1}xr)"] \arrow[d, "\rho(r)"'] & W \arrow[d, "\rho(r)"] \\
rW \arrow[r, "\rho(x)"] & rW
\end{tikzcd}$$

pokazuje, że $\operatorname{Tr}(\rho(x)|_{rW}) = \operatorname{Tr}(\rho(r^{-1}xr)|_W) = \chi_W(r^{-1}xr)$. Mamy więc

$$\chi_\rho(x) = \sum_{r\in R, r^{-1}xr\in H} \chi_W(r^{-1}xr).$$

Teraz zauważmy, że dla wszystkich $g \in rH$ ($g = rh$ dla pewnego $h \in H$) mamy równoważność $g^{-1}xg \in H \iff h^{-1}r^{-1}xrh \in H \iff r^{-1}xr \in H$ oraz, w założeniu, że $r^{-1}xr \in H$, równość $\chi_W(g^{-1}xg) = \chi_W(h^{-1}r^{-1}xrh) = \chi_W(r^{-1}xr)$ (bo $\chi_W \in \operatorname{Cl}(H)$). Stąd teza. □

Wzorując na wzorze z twierdzenia połóżmy dla dowolnej $F \in \operatorname{Cl}(H)$

$$\operatorname{Ind}F(x) := \frac{1}{|H|} \sum_{g\in G, g^{-1}xg\in H} F(g^{-1}xg).$$

Wzór wzajemności Frobeniusa:

TWIERDZENIE *Niech $F \in \operatorname{Cl}(H), S \in \operatorname{Cl}(G)$. Oznaczmy* $\operatorname{Res}S := S|_H$. *Wtedy*

$$(F|\operatorname{Res}S)_H = (\operatorname{Ind}F|S)_G.$$

Dowód: Korzystając z własności charakteru $\overline{\chi(g)} = \chi(g^{-1})$ mamy

$$(\operatorname{Ind}F|S)_G = \frac{1}{|G||H|} \sum_{x\in G} \sum_{g\in G, g^{-1}xg\in H} \overline{F(g^{-1}xg)} S(x) =$$

$$\frac{1}{|G||H|}\sum_{x,g\in G,g^{-1}xg\in H}F(g^{-1}x^{-1}g)S(x).$$

Podstawiając do ostatniego wyrażenia $y^{-1}=g^{-1}x^{-1}g$ otrzymujemy

$$(\mathrm{Ind}F|S)_G=\frac{1}{|G||H|}\sum_{g\in G,y\in H}F(y^{-1})S(gyg^{-1})=$$

$$\frac{1}{|G||H|}\sum_{g\in G,y\in H}\overline{F(y)}S(y)=\frac{1}{|H|}\sum_{y\in H}\overline{F(y)}S(y)=(F|\mathrm{Res}S)_H.\square$$

Przykład: Grupa T ostrosłupa: Grupa T obrotów ostrosłupa foremnego jest izomorficzna z A_4 i ma następujące klasy sprzężoności:

K_1	1
K_2	(12)(34),(13)(24),(14)(23)
K_3	(123),(214),(314),(432)
K_4	(132),(241),(314),(423)

Suma $K_1\cup K_2$ jest komutantem T' grupy T, który jest izomorficzny z D_2. Iloraz T/T' ma 3 elementy, jest więc izomorficzny z C_3. Mamy trzy reprezentacje nieprzywiedlne 1-wymiarowe pochodzące z reprezentacji C_3:

	K_1	K_2	K_3	K_4
V_1	1	1	1	1
V_2	1	1	ϵ	ϵ^2
V_3	1	1	ϵ^2	ϵ

Z rozkładu reprezentacji regularnej wnioskujemy, że brak nam jeszcze jednej reprezentacji 3-wymiarowej albo dziewięciu 1-wymiarowych. Ostatnia możliwość nie zachodzi, ponieważ grupa, której wszystkie nieprzywiedlne reprezentacje są 1-wymiarowe jest abelowa (*Ćwiczenie*). Łatwo pokazać, że brakująca reprezentacja 3-wymiarowa V jest reprezentacją naturalną grupy T w przestrzeni 3-wymiarowej.

Spójrzmy na tę reprezentację z punktu widzenia reprezentacji indukowanych. Oznaczmy elementy grupy T' przez e,a,b,c i rozważmy 1-wymiarowa reprezentację ρ' podgrupy $H=T'$ taką, że $\rho'(a)=-1,\rho'(b)=-1$ oraz indukowaną reprezentację V o charakterze $\chi_V=\mathrm{Ind}\chi_{\rho'}$. Wtedy $(\chi_{\rho'}|\mathrm{Res}\chi_{V_i})_H=0$ (bo $\chi_{\rho'}=\rho',\rho'(e)=1,\rho'(a)=-1,\rho'(b)=-1,\rho'(c)=1,\mathrm{Res}\chi_{V_i}(e)=\mathrm{Res}\chi_{V_i}(a)=\mathrm{Res}\chi_{V_i}(b)=\mathrm{Res}\chi_{V_i}(c)=1$). Ze wzoru wzajemności Frobeniusa mamy też $(\chi_V|\chi_{v_i})_G=0$. Stąd żadna z reprezentacji V_i nie wchodzi do V, co pokazuje nieprzywiedlność ostatniej. Istotnie, V jest 3-wymiarowa (bo $|G/H|=|T/T'|=3$). Gdyby była przywiedlna, musiałaby zawierać niezmienniczą podprzestrzeń 1-wymiarową, która, z kolei, musiałaby być izomorficzną z jedną z V_i. *Ćwiczenie:* obliczyć charakter reprezentacji V na dwa sposoby: 1) z tabelki charakterów; 2) korzystając ze wzoru na charakter reprezentacji indukowanej.

11 Reprezentacje rzeczywiste i kwaternionowe

Literatura dodatkowa: [Ada69, iJIM93, Tra]

Dygresja liniowo-algebraiczna

Kompleksyfikacja $V^{\mathbb{C}}$ rzeczywistej przestrzeni wektorowej V: Jest to przestrzeń wektorowa nad $\mathbb{C}$ zdefiniowana przez $V^{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$; tutaj rozumiemy $\mathbb{C}$ jako prawy $\mathbb{R}$-moduł, a V jako lewy. Jeśli $e_1, \dots, e_n$ jest bazą przestrzeni V, możemy patrzeć na $V^{\mathbb{C}}$ jako na zbiór formalnych kombinacji liniowych $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ o współczynnikach *zespolonych* z naturalnymi operacjami przestrzeni wektorowej. Przy tym $\alpha_i e_i$ odpowiadają tensorom prostym $\alpha_i \otimes e_i$, a wektory $e_1, \dots, e_n$ tworzą też bazę przestrzeni $V^{\mathbb{C}}$. Z tej interpretacji wnioskujemy, że $\dim_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V$.

Mamy też $\mathbb{R}$-izomorfizm $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V = (\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} V \cong V \oplus iV$.

Kompleksyfikacja $L^{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ operatora liniowego $L : V \to V$: $L^{\mathbb{C}} := \mathrm{Id}_{\mathbb{C}} \otimes L$. Jeśli $[L]$ jest macierzą operatora L w bazie $e_1, \dots, e_n$, to macierz operatora $L^{\mathbb{C}}$ w tej że bazie, interpretowanej jako baza $V^{\mathbb{C}}$, będzie się pokrywała z $[L]$.

Struktura rzeczywista na przestrzeni zespolonej: Teraz spróbujmy odpowiedzieć na pytanie: *co wyróżnia przestrzenie będące kompleksyfikacjami wśród wszystkich przestrzeni zespolonych?*

Na przestrzeni $W := V^{\mathbb{C}}$ jest naturalna operacja sprzężenia $R : \alpha \otimes v \mapsto \bar{\alpha} \otimes v, \alpha \in \mathbb{C}, v \in V$. Ma ona następujące własności: 1) $R : W \to W$ jest operatorem półliniowym, czyli addytywnym oraz takim, że $R(\beta w) = \bar{\beta} R(w), \beta \in \mathbb{C}, w \in W$; 2) $R^2 = \mathrm{Id}$; 3) zbiór punktów stałych odwzorowania R pokrywa się z $V \subset V^{\mathbb{C}}$ (tutaj V jest włożone w $V^{\mathbb{C}}$ jako zbiór $\{\alpha \otimes v \mid \alpha \in \mathbb{R}, v \in V\}$).

Teraz niech W będzie dowolną przestrzenią wektorową nad $\mathbb{C}$. *Strukturą rzeczywistą* na przestrzeni W nazwiemy odwzorowanie $R : W \to W$ spełniające warunki 1), 2). Jeśli R jest takim operatorem, to zbiór $V := W^R$ jego punktów stałych ma strukturę przestrzeni wektorowej nad $\mathbb{R}$. Istotnie, V jest zamknięte ze względu na dodawanie (oczywiste, bo R addytywny) oraz ze względu na mnożenie przez skalary z $\mathbb{R}$ ($Rw = w, \beta \in \mathbb{R} \Longrightarrow R(\beta w) = \beta R w = \beta w$).

Ponadto, mamy naturalny $\mathbb{C}$-izomorfizm $W \to V^{\mathbb{C}}$. Istotnie, niech $e_1, \dots, e_n$ będzie bazą przestrzeni W^R. Wtedy $ie_1, \dots, ie_n$ jest bazą przestrzeni własnej $W_{-1} \subset W$ operatora R odpowiadającej wartości własnej -1 i mamy $W = W^R \oplus W_{-1} = W^R \oplus iW^R = \mathbb{C} \otimes W^R$. Łatwo widzieć, że izomorfizm ten nie zależy od wyboru bazy w W^R.

Jeśli $L : W \to W$ jest operatorem $\mathbb{C}$-liniowym, to $L = N^{\mathbb{C}}$ dla pewnego operatora $\mathbb{R}$-liniowego $N : V \to V$ wtedy i tylko wtedy, gdy $LR = RL$. Istotnie, ostatni warunek oznacza, że L zachowuje $V = W^R$; połóżmy $N := L|_V$. *Ćwiczenie:* dopracować szczegóły.

Urzeczywistnienie (forma rzeczywista) $V_{\mathbb{R}}$ przestrzeni zespolonej V: Ponieważ $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ możemy patrzeć na V jako na przestrzeń wektorową nad $\mathbb{R}$, którą będziemy oznaczali przez $V_{\mathbb{R}}$. Przy tym V i $V_{\mathbb{R}}$ pokrywają się jako zbiory, ale $\dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}} = 2 \dim_{\mathbb{C}} V$. Istotnie, jeśli $e_1, \dots, e_n$ jest bazą V, to wektory $e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n$ tworzą bazę $V_{\mathbb{R}}$.

Forma rzeczywista $L_{\mathbb{R}}$ operatora zespolonego $L : V \to V$: Jest to operator L rozumiany jako operator $\mathbb{R}$-liniowy działający z $V_{\mathbb{R}}$ w $V_{\mathbb{R}}$. Jeśli $[L]$ jest macierzą operatora L w bazie $e_1, \dots, e_n$, i $[L] = [L]' + i[L]''$, gdzie $[L]' := \mathrm{Re}[L], [L]'' := \mathrm{Im}[L]$ (części rzeczywista i urojona), to macierz operatora $L_{\mathbb{R}}$ w bazie $e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n$ jest dana wzorem (*Ćwiczenie:* sprawdzić).

$$\begin{bmatrix} [L]' & -[L]'' \\ [L]'' & [L]' \end{bmatrix}.$$

Struktura zespolona na przestrzeni rzeczywistej V: A teraz pytanie: *co wyróżnia przestrzenie będące formami rzeczywistymi wśród wszystkich przestrzeni rzeczywistych?* Odpowiedzialną za takie wyróżnienie jest tzw. *struktura zespolona* na V. Jest to operator $J : V \to V$ o własności $J^2 = -\mathrm{Id}$. Operator ten jest odzwierciedleniem mnożenia przez jedynkę urojoną. Jeśli J jest takim operatorem, wprowadzamy w V strukturę przestrzeni zespolonej przez $iv := Jv, v \in V$ (dodawanie i mnożenie przez skalary rzeczywiste mamy za darmo). W szczególności, wymiar przestrzeni V nad $\mathbb{R}$ musi być parzysty.

Operator $L : V \to V$ jest forma rzeczywistą pewnego operatora zespolonego wtedy i tylko wtedy, gdy $LJ = JL$.

Najpierw kompleksyfikacja, potem urzeczywistnienie: $(V^{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} \cong V \oplus V$ (*Ćwiczenie*).

Najpierw urzeczywistnienie, potem kompleksyfikacja: $(V_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} \cong V \oplus \overline{V}$ (*Ćwiczenie*); tutaj przez $\overline{V}$ oznaczamy przestrzeń *sprzężoną* do V, czyli $\mathbb{C}$-liniową przestrzeń, której struktura addytywna pokrywa się z tą z V, a mnożenie przez skalary zadane jest wzorem $\alpha * v := \bar{\alpha}v, \alpha \in \mathbb{C}, v \in V$.

Przestrzenie i operatory sprzężone: Przestrzenie sprzężone wprowadziliśmy wyżej. Niech $L : V \to W$ będzie operatorem liniowym. Ten sam operator rozumiany jako operator $V \to \overline{W}$ będziemy oznaczać L^-. Jest półliniowy: $L^-(\alpha v) = \alpha L^- v = \bar{\alpha} * L^- v$. Analogicznie definiujemy operator ${}^-L : \overline{V} \to W$ (też półliniowy), i kładziemy $\overline{L} :=^- L^- : \overline{V} \to \overline{W}$ (ostatni jest operatorem liniowym).

Algebra kwaternionów $\mathbb{H}$: Jest to algebra nad $\mathbb{R}$ generowana jako przestrzeń wektorowa przez cztery wektory $1, i, j, k$ spełniające następujące reguły mnożenia:

1. 1 jest elementem neutralnym względem mnożenia;
2. $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k, jk = i, ki = j$.

Wnioskiem z powyższych reguł są tożsamości $ji = -k, kj = -i, ik = -j$ oraz możliwość reprezentacji kwaterniona $\alpha 1 + \beta i + \gamma j + \delta k$ w postaci $\alpha 1 + \beta i + (\gamma 1 + \delta i)j$, czyli za pomocą pary liczb zespolonych $(\alpha 1 + \beta i, \gamma 1 + \delta i)$. Inaczej, $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j$.

Reprezentacja macierzowa algebry $\mathbb{H}$: Łatwo się przekonać, że następujace macierze spełniają powyższe reguły względem standardowego mnożenia macierzy:

$$\mathbf{1} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{i} := \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{j} := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{k} := \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Wszystkie kombinacje liniowe tych macierzy o współczynnikach *rzeczywistych* będą tworzyły algebrę $\mathbb{H}$.

Prawa przestrzeń wektorowa V nad $\mathbb{H}$: Jest to *prawy moduł* nad $\mathbb{H}$ (lewy moduł daje nierównoważne pojęcie, ponieważ $\mathbb{H}$ jest nieprzemienna).

Operator $\mathbb{H}$-*liniowy* na V definiujemy jako odwzorowanie $L : V \to V$ będące morfizmem $\mathbb{H}$-modułów (czyli addytywne odwzorowanie, spełniające $L(vh) = L(v)h, v \in V, h \in \mathbb{H}$).

Forma zespolona $V_{\mathbb{C}}$ kwaternionowej prawej przestrzeni liniowej V: Ponieważ $\mathbb{C} \subset \mathbb{H}$, mamy strukturę przestrzeni $\mathbb{C}$-liniowej na V. Formę zespoloną $L_{\mathbb{C}}$ operatora $\mathbb{H}$-liniowego $L : V \to V$ definiujemy podobnie jak w przypadku formy rzeczywistej operatora zespolonego (czyli zapominamy, że jest $\mathbb{H}$-liniowy, a pamiętamy, że jest $\mathbb{C}$-liniowy).

Struktura kwaternionowa na prestrzeni zespolonej V: Jest to struktura, która wyróżnia formy zespolone przestrzeni kwaternionowych wśród przestrzeni zespolonych. Definiuje się jako operator półliniowy $H : V \to V$ o własności $H^2 = -\operatorname{Id}$ (jest odzwierciedleniem prawego mnożenia przez j). Jeśli H jest takim operatorem, wprowadzamy w V strukturę prawego $\mathbb{H}$-modułu przez $vj := Jv$ (dodawanie i mnożenie przez skalary zespolone już mamy). W szczególności, wymiar przestrzeni V nad $\mathbb{C}$ musi być parzysty.

Można pokazać, że operator $L : V \to V$ jest formą zespoloną wtedy i tylko wtedy, gdy $LH = HL$.

Jak to się przekłada na reprezentacje

Struktura rzeczywista $R : W \to W$ na reprezentacji zespolonej $\rho : G \to GL(V)$: Jest to struktura rzeczywista na przestrzeni zespolonej V, będąca operatorem *splatającym* dla ρ. Z powyższych rozważań wnioskujemy, że $W = V^{\mathbb{C}}$, gdzie $V := W^R$, oraz, że istnieje taka reprezentacja rzeczywista $\tau : G \to GL(V)$, ze $\rho(g) = \tau(g)^{\mathbb{C}}$ dla każdego $g \in G$.

Reprezentacja kwaternionowa grupy G w prawej przestrzeni kwaternionowej V: Jest to homomorfizm grup $\zeta : G \to GL_{\mathbb{H}}(V)$, gdzie przez $GL_{\mathbb{H}}(V)$ oznaczyliśmy grupę odwracalnych $\mathbb{H}$-liniowych odwzorowań z V w V.

Struktura kwaternionowa $H : V \to V$ na reprezentacji zespolonej $\rho : G \to GL(V)$: Jest to z kolei struktura kwaternionowa na przestrzeni zespolonej V, będąca operatorem *splatającym* dla ρ. Możemy wprowadzić strukturę prawej $\mathbb{H}$-przestrzeni liniowej na V oraz pokazać, że istnieje reprezentacja kwaternionowa $\zeta : G \to GL_{\mathbb{H}}(V)$ taka, że $\rho(g) = \zeta(g)_{\mathbb{C}}$ dla dowolnego $g \in G$.

Reprezentacja sprzężona do reprezentacji zespolonej $\rho : G \to GL(V)$: Jest to reprezentacja $\overline{\rho} : G \to GL(\overline{V})$ w przestrzeni $\overline{V}$ zadana wzorem $\overline{\rho}(g) := \overline{\rho(g)}, g \in G$. Reprezentacje ρ i $\overline{\rho}$, na pozór jednakowe, mogą być nie równoważne. Istotnie, operator $v \mapsto v : V \to \overline{V}$ (czyli Id^-) jest operatorem splatającym pomiędzy ρ i $\overline{\rho}$, ale nie jest liniowy (jest półliniowy). Ale może też istnieć nietrywialny operator liniowy splatający, realizujący równoważność ρ i $\overline{\rho}$.

LEMAT *Niech ρ będzie reprezentacją nieprzywiedlną i równoważną z $\overline{\rho}$ i niech $C : V \to \overline{V}$ będzie (liniowym) operatorem splatającym, realizującym tę równoważność. Wtedy C jest określony z dokładnością do czynnika liczbowego, który można wybrać tak, żeby $C^- : V \to V$ było strukturą rzeczywistą lub kwaternionową.*

Dowód: Niech $C' : V \to \overline{V}$ będzie innym operatorem splatającym, realizującym równoważność. Wtedy $C^{-1}C' : V \to V$ jest operatorem splatającym (pomiędzy ρ i ρ) i według lematu Schura musi być postaci $\lambda \operatorname{Id}$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{C}$. Mamy więc $C' = \lambda C$. Zauważmy, że operator $\overline{C} : \overline{V} \to \overline{\overline{V}} = V$ jest operatorem splatającym (pomiędzy $\overline{\rho}$ i ρ), stąd możemy położyć $C' := (\overline{C})^{-1}$ i dostać $(\overline{C})^{-1} = \lambda C$. Mamy więc $C\overline{C} = (1/\lambda) \operatorname{Id}, \overline{C}C = (1/\lambda) \operatorname{Id}$. Ponieważ $\operatorname{Tr}(C\overline{C}) = \operatorname{Tr}(\overline{C}C)$, skalar λ musi być rzeczywisty. Teraz zauważmy, że $\overline{C}C = (C^-)(C^-)$. Zastępując C przez $\sqrt{\lambda}C$ w przypadku $\lambda > 0$ lub przez $i\sqrt{|\lambda|}$ w przypadku $\lambda < 0$, otrzymujemy wynik. □

Typy reprezentacji: Mówimy, że reprezentacja zespolona ρ jest *typu*

1. *zespolonego*, jeśli ρ i $\overline{\rho}$ nie są równoważne;
2. *rzeczywistego*, jeśli są równoważne i C^- po przeskalowaniu jest struktura rzeczywista;
3. *kwaternionowego*, jeśli są równoważne i C^- po przeskalowaniu jest struktura kwaternionowa.

Twierdzenie *(Frobeniusa–Schura) Niech χ będzie charakterem nieprzywiedlnej zespolonej reprezentacji $\rho : G \to GL(V)$ skończonej grupy G i niech*

$$x := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g^2)$$

Wtedy

1. $x = 0 \iff \rho$ *jest typu zespolonego;*

2. $x = 1 \iff \rho$ *jest typu rzeczywistego;*

3. $x = -1 \iff \rho$ *jest typu kwaternionowego.*

Dowod: zob. [Tra].

Przykład: Rozważmy naturalną 1-wymiarową reprezentację grupy cyklicznej $C_n = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$ o charakterze $\chi, \chi(a^j) = \epsilon^j, \epsilon := e^{i2\pi/n}$. Reprezentacja ta nie może byc typu kwaternionowego, bo wymiar przestrzeni jest nieparzysty.

Z kolei, żeby reprezentacja ta była typu rzeczywistego wartości własne wszystkich operatorów reprezentacji muszą być rzeczywiste. To sugeruje, że ta reprezentacja jest typu rzeczywistego tylko w przypadku $n = 2$. Istotnie, w tym przypadku $x = (1/2)(\chi(e^2) + \chi(a^2)) = (1/2)(\chi(e) + \chi(e)) = 1$.

Dla $n = 3$ mamy $x = (1/3)(\chi(e^2)+\chi(a^2)+\chi(a^4)) = (1/3)(\chi(e)+\chi(a^2)+\chi(a)) = (1/3)(1+\epsilon^2+\epsilon) = 0$.

Dla $n = 4$: $x = (1/4)(\chi(e^2) + \chi(a^2) + \chi(a^4) + \chi(a^6)) = (1/4)(\chi(e) + \chi(a^2) + \chi(e) + \chi(a^2)) = (1/4)(1 + (-1) + 1 + (-1)) = 0$.

Ćwiczenie: Jak jest dla dowolnego n?

12 Grupy Liego, cz. I

Literatura dodatkowa: [Ada69, Tra]

Grupa Liego: Jest to grupa (G, μ) taka, że G jest wyposażone w strukturę rozmaitości różniczkowej o tej własności, że działanie grupowe $\mu : G \times G \to G$ oraz odwzorowanie $\epsilon : g \mapsto g^{-1} : G \to G$ są gładkie.

PRZYKŁAD PODSTAWOWY: $G := GL(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid \det X \neq 0\}$ grupa odwracalnych macierzy $n \times n$ o wyrazach rzeczywistych. Funkcja $\det : \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ jest wielomianem na $\mathbb{R}^{n^2}$, więc jest ciągła. Wnioskujemy stąd, że zbiór $\{X \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid \det x = 0\} = \det^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ jest domknięty, a jego dopełnienie $GL(n, \mathbb{R})$ jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^{n^2}$. Możemy teraz wyposażyć G w strukturę rozmaitości gładkiej „odziedziczonej" z $\mathbb{R}^{n^2}$.

Mnożenie macierzy $\mu : \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \times \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}), (X, Y) \mapsto XY$, jest odwzorowaniem wielomianowym $\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2}$, jest więc gładkie i zostaje takim po ograniczeniu do zbioru otwartego $G \times G \subset \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \times \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$.

Odwzorowanie $\epsilon : G \to G, X \mapsto X^{-1}$, jest zadane przez odwzorowanie wymierne na $\mathbb{R}^{n^2}$, czyli takie, że jego składowe są stosunkami wielomianów. Przy tym wielomian pojawiający się w mianowniku to wyznacznik. Ostatni nie zeruje się na podzbiorze $G \subset \mathbb{R}^{n^2}$, stąd ϵ również jest odwzorowaniem gładkim.

Uwaga: Analogicznie możemy rozpatrywać grupę $G := GL(n, \mathbb{C})$ odwracalnych macierzy $n \times n$ o wyrazach zespolonych. Można ją rozpatrywać jako podzbiór otwarty w $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n^2} \cong \mathbb{R}^{2n^2}$ i traktować jako grupę Liego. Istotnie, odwzorowania μ i ϵ będą odpowiednio wielomianowym i wymiernym (z niezerującym się mianownikiem) odwzorowaniami od części rzeczywistych i urojonych wyrazów macierzy.

Alternatywne spojrzenie polega na patrzeniu na G jako na *rozmaitość zespoloną* i *zespoloną grupę Liego*.

Podgrupa Liego $H \subset G$ w grupie Liego G: Jest to podgrupa, będąca podrozmaitośćią gładką w G. Grupa H sama jest grupą Liego. Istotnie, odwzorowania $\mu : G \times G \to G$ i $\epsilon : G \to G$ ograniczone do $H \times H$ i H odpowiednio, są gładkie.

PRZYKŁAD: Niech $G := GL(1, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^*$, $H := U(1) = \{z \in GL(1, \mathbb{C}) \mid z\bar{z} = 1\}$. Równanie $z\bar{z} = 1$ w zmiennych rzeczywistych ma postać $x^2 + y^2 = 1$, czyli zadaje okrąg jednostkowy, podrozmaitość gładką w G.

Algebraiczne grupy liniowe: Są to podgrupy $H \subset GL(n, \mathbb{R})$ grupy macierzy odwracalnych, będące *zbiorami algebraicznymi* w $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ (zbiór $H \subset \mathbb{R}^m$ nazywamy algebraicznym, jeśli istnieją wielomiany $f_1, \ldots, f_k$ na $\mathbb{R}^m$ takie, że $H := \{x \in \mathbb{R}^m \mid f_1(x) = 0, \ldots, f_k(x) = 0\}$).

LEMAT *Algebraiczne grupy liniowe są podgrupami Liego w $GL(n, \mathbb{R})$.*

Dowód: Niech $H := \{x \in \mathbb{R}^{n^2} \mid f_1(x) = 0, \ldots, f_k(x) = 0\} \subset GL(n, \mathbb{R})$ będzie algebraiczną grupą liniową. Rozważmy macierz Jacobiego $J[f](x) = [\frac{\partial f_i}{\partial x_j}]$ i połóżmy $r := \max_{x \in H} \mathrm{rank}\, J[f](x), P := \{x \in H \mid \mathrm{rank}\, J[f](x) = r\}$. Zauważmy, że zbiór P jest niepusty.

Skorzystajmy z „jednorodności" grupy $H \subset GL(n, \mathbb{R})$. Dokładniej, niech $y \in H$ będzie dowolnym elementem, a $x \in P$. Wtedy istnieje $h \in H$ taki, że $hx = y$. Odwzorowanie $L_h : GL(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R}), g \mapsto hg$, jest dyfeomorfizmem. Stąd $\mathrm{rank}\, J[f](y) = \mathrm{rank}\, J[f](x) = r$.

Widzimy, że rząd $J[f]$ jest stały na całym H. Z twierdzenia o stałym rzędzie wnioskujemy, że H jest powierzchnią (wymiaru $n^2 - r$). $\square$

PRZYKŁAD: $G := SL(n, \mathbb{R}) = \{X \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det X = 1\}, T_eG = \{x \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}\, x = 0\}$.

PRZYKŁAD: $G := SL(n, \mathbb{C}) = \{X \in GL(n, \mathbb{C}) \mid \det X = 1\}$.

PRZYKŁAD: $G := O(n, \mathbb{R}) = \{X \in GL(n, \mathbb{R}) \mid XX^T = I_n\}$.

PRZYKŁAD: $G := SO(n, \mathbb{R}) = O(n, \mathbb{R}) \cap SL(n, \mathbb{R})$

PRZYKŁAD: $G := Sp(n, \mathbb{R}) = \{X \in GL(2n, \mathbb{R}) \mid XJX^T = J\}$, tutaj $J := \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$.

PRZYKŁAD: $G := U(n) = \{X \in GL(n, \mathbb{C}) \mid X\overline{X}^T = I_n\}$

PRZYKŁAD: $G := SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$.

PRZYKŁAD: $G := Sp(n) = \{X \in GL(n, \mathbb{H}) \mid X\overline{X}^T = I_n\}$, tutaj $GL(n, \mathbb{H})$ oznacza grupę odwracalnych macierzy $n \times n$ owyrazach kwaternionowych, a $\overline{X}$ oznacza macierz otrzymaną z macierzy X zastosowaniem *sprzężenia kwaternionowego* do każdego wyrazu: $\overline{\alpha 1 + \beta i + \gamma j + \delta k} = \alpha 1 - \beta i - \gamma j - \delta k$.

Przykład podgrupy nie będącej podgrupą Liego: Zauważmy, że podgrupa Liego $H \subset G$ jest podzbiorem *domkniętym* w grupie Liego G. Do zbudowania takiego przykładu wystarczy więc znaleźć podgrupę *niedomkniętą*.

PRZYKŁAD: Grupa $(\mathbb{R}, +)$ jest grupą Liego a jej podgrupa $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych nie jest domknięta: $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

13 Grupy Liego, cz. II

Algebra Liego $(V, [,])$**:** Jest to przestrzeń wektorowa V nad ciałem $\mathbb{K}$ wyposażona w działanie 2-liniowe $(x, y) \mapsto [x, y] : V \times V \to V$, spełniające następujące warunki:

1. $[x, y] = -[y, x]\ \forall x, y \in V$ (skośna symetria);
2. $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0\ \forall x, y, z \in V$ (tozsamość Jacobiego).

Przykład: Niech $(A, \cdot)$ będzie dowolną algebrą łączną. Wtedy $(A, [,])$, gdzie $[x, y] := x \cdot y - y \cdot x$ jest algebrą Liego (*Ćwiczenie:* sprawdzić). W szczególności, $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$ z komutatorem macierzowym jest algebrą Liego. Oznaczamy $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) := (\mathrm{Mat}(n, \mathbb{K}), [,])$.

Ogólniej, jeśli W jest dowolną przestrzenią wektorową, zbiór $\mathrm{End}(W)$ endomorfizmów przestrzeni W (czyli operatorów liniowych $L : W \to W$) jest algebrą Liego.

Homomorfizm algebr Liego $(V_1, [,]_1)$ **i** $(V_2, [,]_2)$**:** Jest to odwzorowanie liniowe $\phi : V_1 \to V_2$ zachowujące „nawiasy”, czyli $\phi[x, y]_1 = [\phi x, \phi y]_2\ \forall x, y \in V_1$.

Ćwiczenie: Niech $(V, [,])$ będzie przestrzeią wektorową wyposażoną w działanie 2-liniowe *skośnie symetryczne.* Określmy operator $\mathrm{ad}_x \in \mathrm{End}(V)$ wzorem $\mathrm{ad}_x y := [x, y], x, y \in V$. Pokazać, że tożsamość Jacobiego (TJ) jest równoważna następującemu warunkowi: $[\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y] = \mathrm{ad}_{[x,y]}$ (w szczególności, jeśli $[,]$ spełnia TJ, to odwzorowanie $x \mapsto \mathrm{ad}_x : V \to \mathrm{End}(V)$ jest homomorfizmem algebr Liego).

Podalgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ algebry Liego $(\mathfrak{g}, [,])$**:** Jest to podprzestrzeń liniowa w $\mathfrak{g}$ zamknięta ze względu na nawias: $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$.

Przykład: Podprzestrzeń $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ macierzy *bezśladowych* (mamy $\mathrm{Tr}([x, y]) = \mathrm{Tr}(xy - yx) = 0$ dla dowolnych $x, y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, w szczególności komutator macierzy bezśladowych jest bezśladowy).

Przykład: Podprzestrzeń $\mathfrak{o}(n, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ macierzy *skośnie ortogonalnych*, czyli takich macierzy x, że $x = -x^T$. Dla $x, y \in \mathfrak{o}(n, \mathbb{R})$ mamy $[x, y]^T = (xy - yx)^T = y^T x^T - x^T y^T = yx - xy = -[x, y]$.

Algebra Liego różniczkowań algebry łącznej $(A, \cdot)$**:** *Różniczkowaniem* algebry łącznej nazywamy odwzorowanie liniowe $d : A \to A$ spełniające warunek $d(x \cdot y) = dx \cdot y + x \cdot dy$. Różniczkowania tworzą podprzestrzeń $D \subset \mathrm{End}(A)$ i, ponadto, podalgebrę Liego w $(\mathrm{End}(A), [,])$. Istotnie, $(d_1 d_2 - d_2 d_1)(x \cdot y) = d_1(d_2 x \cdot y + x \cdot d_2 y) - d_2(d_1 x \cdot y + x \cdot d_1 y) = d_1 d_2 x \cdot y + d_2 x \cdot d_1 y + d_1 x \cdot d_2 y + x \cdot d_1 d_2 y - (d_2 d_1 x \cdot y + d_1 x \cdot d_2 y + d_2 x \cdot d_1 y + x \cdot d_2 d_1 y) = (d_1 d_2 - d_2 d_1) x \cdot y + x \cdot (d_1 d_2 - d_2 d_1) y$.

Algebra Liego $\mathrm{Vect}(M)$ **pól wektorowych na rozmaitości gładkiej** M**:** Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^\infty(M, \mathbb{R}), \cdot)$ funkcji gładkich na M o wartościach rzeczywistych ze strukturą (przemiennej) algebry łącznej względem mnożenia punktowego funkcji. Różniczkowania tej algebry nazywają się *polami wektorowymi* na M i tworzą algebrę Liego względem komutatora.

Inaczej na pola wektorowe można patrzeć jako na cięcia gładkie wiązki stycznej $TM \xrightarrow{\tau} M$. Elementami TM są pary (v, x), gdzie $x \in M$, a v jest wektorem stycznym do M zaczepionym w punkcie x. Zbiór wszystkich takich wektorów, czyli włókno nad x, oznaczamy $T_x M$. Każde pole wektorowe ma więc postać $(v(x), x)$, gdzie $x \in M$, a wektor $v(x) \in T_x M$ gładko zależy od punktu x.

Wiązka TM jest wiązką lokalnie trywialną, czyli jej ograniczenie TU na mały podzbiór otwarty $U \subset M$ może być utożsamione z wiązką trywialną $\mathbb{R}^n \times U \to U$, gdzie $n = \dim M$, a jej cięcia mogą być utożsamione z parami $(f(x), x)$, gdzie $x \in U$, a $f : U \to \mathbb{R}^n, f(x) = (f^1(x), \ldots, f^n(x))$

jest funkcją gładką. Utożsamienie włókien wiązki TU z $\mathbb{R}^n$ jest związane z wyborem współrzędnych lokalnych $(x^1, \dots, x^n)$ na U. Alternatywnie, pole wektorowe zapisujemy jako $f = f^i \partial_i$ (sumowanie po i), gdzie $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$, a jego działanie na funkcje $F \in \mathbb{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ wygląda następująco: $fF := f^i(\partial_i F)$ (jest różniczkowaniem w sensie powyższej definicji).

Dla komutatora pól wektorowych mamy następujący wzór:

$$[f, g]^i(x) = f^j(x)(\partial_j g^i(x)) - g^j(x)(\partial_j f^i(x))$$

(*Ćwiczenie:* sprawdzić).

Zachowanie pól wektorowych względem dyfeomorfizmów $\psi : M \to M$: Każdy taki dyfeomorfizm generuje *odwzorowanie styczne* $\psi_* : TM \to TM$, które na parach $(v, x), x \in M, v \in T_x M$, będziemy zapisywali jako $\psi_*(v, x) = (\psi_*|_x v, \psi(x))$, tutaj $\psi_*|_x : T_x M \to T_{\psi(x)} M$ jest pewnym odwzorowaniem liniowym. Jeśli $\psi(x_0) = y_0$, i jeśli $(x^1, \dots, x^n), (y^1, \dots, y^n)$ są współrzędnymi lokalnymi w otoczeniach $X \ni x_0, Y \ni y_0$, odwzorowanie ψ można zadać jako n-tkę funkcji $(x^1, \dots, x^n) \mapsto (y^1 = \psi^1(x), \dots, y^n = \psi^n(x))$. Odwzorowanie $\psi_*|_x : T_x M \cong \mathbb{R}^n \times \{x\} \to T_{\psi(x)} M \cong \mathbb{R}^n \times \{\psi(x)\}$ pokrywa się wtedy z macierzą Jacobiego

$$J[\psi](x) := \begin{bmatrix} \partial_1 \psi^1 & \dots & \partial_1 \psi^n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n \psi^1 & \dots & \partial_n \psi^n \end{bmatrix}$$

traktowaną jako odwzorowanie liniowe $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Odwzorowanie ψ_* działa na pola wektorowe: $\mathrm{Vect}(M) \ni f \mapsto \psi_* f \in \mathrm{Vect}(M), f = (f(x), x) \mapsto (J[\psi](x) f(x), \psi(x))$. Okazuje się, że $\psi_* : \mathrm{Vect}(M) \to \mathrm{Vect}(M)$ jest homomorfizmem algebry Liego, czyli $\psi_*[f, g] = [\psi_* f, \psi_* g]$ (*Ćwiczenie:* sprawdzić).

Algebra Liego lewoniezmienniczych pól wektorowych na grupie Liego G: Dla $g \in G$ określmy odwzorowanie lewej translacji $L_g : G \to G$ wzorem $L_g x := gx$. Mając element $v \in T_e G$ możemy zbudować pole wektorowe $v^l \in \mathrm{Vect}(G)$ kładząc $v^l = ((L_g)_*|_e v, g)$. Tak okreslone pole wektorowe jest *lewoniezmiennicze*, czyli $(L_g)_* v^l = v^l$. Istotnie, jeśli $v^l = (v^l(g), g)$, to $(L_{g'})_* v^l = ((L_{g'})_*|_g v^l(g), L_{g'} g) = ((L_{g'})_*|_g (L_g)_*|_e v, g'g) = ((L_{g'} L_g)_*|_e v, g'g) = ((L_{g'g})_*|_e v, g'g) = v^l$. Tutaj skorzystaliśmy z tożsamości $(\psi \circ \eta)_* = \psi_* \circ \eta_*$, gdzie ψ, η są dowolnymi dyfeomorfizmami.

Odwrotnie, jeśli pole $w \in \mathrm{Vect}(G)$ jest lewoniezmiennicze, to $w = v^l$, gdzie $v := w(e)$. Mamy więc utożsamienie zbioru $\mathfrak{g}$ lewoniezmienniczych pól wektorowych z włóknem $T_e G$. Okazuje się, że $\mathfrak{g}$ jest podalgebrą Liego w $\mathrm{Vect}(G)$. To wynika z następującego lematu.

LEMAT *Niech $(V, [,])$ będzie algebrą Liego, a Ψ pęwnym zbiorem jej homomorfizmów. Wtedy zbiór $V^\Psi := \{x \in V \mid \psi(x) = x \ \forall \psi \in \Psi\}$ jest podalgebrą Liego.*

Dowód: Niech $x, y \in V^\Psi$, wtedy dla każdego $\psi \in \Psi$ mamy $\psi[x, y] = [\psi x, \psi y] = [x, y]$, czyli $[x, y] \in V^\Psi$.

Algebra Liego $\mathfrak{g}$ grupy Liego G: Jest to określona powyżej algebra Liego pól lewoniezmienniczych na G. Oznaczamy też $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$. Zauważmy, że, ponieważ odwzorowanie $\phi_l : T_e G \to \mathfrak{g}, v \mapsto v^l$, jest izomorfizmem przestrzeni liniowych, $\dim \mathfrak{g} = n = \dim G$. Ponadto, używając tego izomorfizmu, możemy „przenieść” strukturę algebry Liego z $\mathfrak{g}$ na $T_e G$ według wzoru $[v, w] := \phi_l^{-1}[\phi_l v, \phi_l w] = [v^l, w^l](e)$.

Dlatego też często pod „algebrą Liego” grupy G rozumie się przestrzeń T_eG wyposażona w powyższy nawias.

Przykład: Niech $G := GL(n, \mathbb{R})$. Ponieważ G jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^{n^2}$, mamy $TG = \mathbb{R}^{n^2} \times G$ i każde pole wektorowe jest postaci $(V(X), X)$, gdzie $V(X)$ jest gładka funkcja na G o wartościach macierzowych: $V(X) = \begin{bmatrix} V_{11}(X) & \dots & V_{1n}(X) \\ & \dots & \\ V_{n1}(X) & \dots & V_{nn}(X) \end{bmatrix}$. Łatwo widzieć, że jeśli $V \in T_IG \cong \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$, to $V^l = (XV, X)$. Innymi słowy, $V^l = X_{ij}V_{jk}\partial_{ik}$. Stąd $[V^l, W^l]^{i'k'} = (X_{ij}V_{jk}\partial_{ik}X_{i'j'}W_{j'k'}) - (X_{ij}W_{jk}\partial_{ik}X_{i'j'}V_{j'k'}) = (X_{ij}V_{jk}\delta_{ii'}\delta_{kj'}W_{j'k'}) - (X_{ij}W_{jk}\delta_{ii'}\delta_{kj'}V_{j'k'}) = (X_{i'j}V_{jk}W_{kk'}) - (X_{i'j}W_{jk}V_{kk'}) = X_{i'j}[V, W]_{jk'} = ([V, W]^l)^{i'k'}$. Stąd struktura algebry Liego na $T_IG \cong \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ „przeniesiona” z algebry Liego pól lewoniezmienniczych pokrywa się z $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

Ćwiczenie: Niech $H \subset G$ będzie podgrupą Liego grupy Liego G. Pokazać, że podprzestrzeń $T_eH \subset T_eG$ jest podalgebrą Liego w algebrze Liego $\mathfrak{g} = T_eG$ i, co więcej, T_eH jako algebra Liego pokrywa się z $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(H)$.

Przykład: Niech $G := GL(n, \mathbb{R}), H := O(n, \mathbb{R})$. Wtedy $T_IG = \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, a podprzestrzeń T_IH może być obliczona jako zbiór wektorów stycznych w zerze do krzywych gładkich $t \mapsto c(t) \in O(n, \mathbb{R}), c(0) = I$. Różniczkując tożsamość $c(t)(c(t))^T = I$ w zerze, otrzymujemy $c'(0)(c(0))^T + c(0)(c'(0))^T = 0$, skąd $c'(0) + (c'(0))^T = 0$. Wnioskujemy stąd, że T_IH składa się z macierzy skośnie symetrycznych i że $\mathfrak{h} = \mathfrak{o}(n, \mathbb{R})$.

Twierdzenia Liego

Twierdzenie *(I twierdzenie Liego) Jeśli dla skończenie wymiarowej algebry Liego $\mathfrak{g}$ istnieje grupa Liego G taka, że $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, to istnieje też jedyna jednospójna grupa Liego G' o własności $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G')$.*

Uwaga: Jednospójność oznacza ściągalność każdej pętli.

Przykład: Grupy Liego $(\mathbb{R}, +)$ i $U(1)$ mają tę samą algebrę Liego $\mathbb{R}$ (z nawiasem zerowym $[x, y] = 0\ \forall x, y \in \mathbb{R}$. Pierwsza z nich jest jednospójna, druga nie.

Twierdzenie *(II twierdzenie Liego) Niech $\phi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ będzie homomorfizmem skończenie wymiarowych algebr Liego i niech G_1, G_2 będą takimi grupami Liego, że $\mathfrak{g}_i = \mathrm{Lie}(G_i), i = 1, 2$. Jeśli G_1 jest jednospójna, to istnieje jedyny homomorfizm grup Liego $\Phi : G_1 \to G_2$ „całkujący” ϕ.*

Uwaga: Homomorfizmem grup Liego nazywamy odwzorowanie $\Phi : G_1 \to G_2$ będące 1) homomorfizmem grup; 2) odwzorowaniem gładkim. Okazuje się, że odwzorowanie $\Phi_*|_{e_1} : T_{e_1}G_1 \to T_{e_2}G_2$ jest homomorfizmem odpowiednich algebr Liego $\phi := \Phi_*|_{e_1} : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$. Mówimy, że Φ „całkuje” ϕ.

Twierdzenie *(III twierdzenie Liego) Dla każdej skończenie wymiarowej algebry Liego $\mathfrak{g}$ istnieje grupa Liego G taka, że $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$.*

Twierdzenia Liego pokazują, że badanie grup Liego w dużej mierze sprowadza się do badania algebr Liego.

Literatura

[Ada69] J. Frank Adams, *Lectures on Lie groups*, Benjamin, 1969.

[CR88] Charles W. Curtis and Irving Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, John Wiley and Sons, 1988.

[iJIM93] A. I. Kostrikin i J. I. Manin, *Algebra liniowa i geometria*, PWN, 1993.

[Kir72] A.A. Kirillov, *Elementy teorii reprezentacji*, Nauka, 1972, W języku rosyjskim.

[Kir76] ———, *Elements of the theory of representations*, Springer-Verlag, Berlin, 1976, Translated from the Russian.

[Ser88] Jean-Pierre Serre, *Reprezentacje liniowe grup skończonych*, PWN, 1988.

[Szc] Andrzej Szczepański, *Wprowadzenie do teorii grup krystalograficznych*, Wykład monograficzny, dostępne na http://mat.ug.edu.pl/∼aszczepa/crystall1.pdf.

[Tra] Andrzej Trautman, *Grupy oraz ich reprezentacje*, Skrypt do wykładu, dostępne na http://www.fuw.edu.pl/˜amt.

[Wei96] A. Weinstein, *Grupoids: Unifying internal and external symmetry*, Notices Amer. Math. Soc. **43** (1996), 744–752.