WPROWADZENIE DO OPERATORÓW RÓŻNICZKOWYCH NA GRAFACH

ANNA MURANOVA

Streszczenie. Krótkie wprowadzenie do operatorów różniczkowych na grafach: laplasjan oraz operator prawdopodobieństwa.

Oznaczenia

$\mathbb{N}$ – liczby naturalne
$\mathbb{R}$ – liczby rzeczywiste
$\mathbb{R}^+$ – liczby rzeczywiste dodatnie
$\#$ – ilość elementów w zbiorze.

1. Grafy ważony

*Graf ważony (inaczej graf z wagami)*jest parą (V, b), gdzie V jest zbiorem wierzchołków (tj. dowolnym zbiorem) oraz $b : V \times V \to \mathbb{R}$ spełnia następujące warunki:
$b(x, y) \leq 0$ dla każdego $x, y \in V$,
$b(x, y) = b(y, x)$ dla każdego $x, y \in V$,
$b(x, x) = 0$ dla każdego $x \in V$.

Jeśli $\underline{(x, y)} \neq 0$, to mówimy, że pomiędzy x, y jest *krawędź* i zapisujemy $x \sim y$. Trzeci warunek oznacza, że rozważamy grafy bez pętle.

Ścieżka w grafie to dowolny ciąg wierzchołków, taki że

$$x_1 \sim x_2 \sim \cdots \sim x_n.$$

Spójny graf – graf, w którym każdą parę wierzchołków łączy pewna ścieżka. *Graf skończony* ma skończoną ilość wierzchołków ($\#V < \infty$). W tym wprowadzeniu rozważamy wyłącznie skończone spójne grafy.

Graf pełny – graf w którym if $x \sim y$ dla każdego $x, y \in V$. Inaczej graf nazywa się *niepełnym*.

Graf nazywa się *dwudzielnym*, jeżeli istnieje podział jego wierzchołków $V = V_1 \cup V_2$ taki że z $x \sim y$ $(x, y \in V)$ wynika albo $x \in V_1, y \in V_2$, albo $x \in V_2, y \in V_1$.

Będziemy tez rozpatrzyć wagi *znormalizowane*:

$$p(x, y) = \frac{b(x, y)}{b(x)}, \tag{1}$$

gdzie $b(x) = \sum_y b(x, y)$. Trzeba uważać, że ogólnie $p(x, y) \neq p(y, x)$.

2. Podstawowe operatory różniczkowe

Rozważmy następujący zbiór funkcji na wierzchołkach grafu ważonego

$$\mathfrak{F} = \{f \mid f : V \to \mathbb{R}\}$$

Naszym głównym zainteresowaniem będzie znormalizowany operator Laplace'a (laplasjan) oraz operator prawdopodobieństwa $\mathfrak{F}$. *Operator Laplace'a (laplasjan)* jest zdefiniowany jako

$$\mathcal{L}f(x) = \sum_{y\in V}(f(x) - f(y))\frac{b(x,y)}{b(x)} = \sum_{y\in V}(f(x) - f(y))p(x,y) \tag{2}$$

dla wszystkich $f \in \mathfrak{F}$.

Operator $\mathcal{P} = I - \mathcal{L}$ dla $f \in \mathfrak{F}$ nazywa się *operatorem prawdopodobieństwa.*

Definicja 1. Operator *różnicy* jest zdefiniowany jako

$$\nabla_{xy}f = f(y) - f(x) \tag{3}$$

Operator różnicy jest dyskretnym analogiem pochodnej $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. Z (3) wynika, że

$$\mathcal{L}f(x) = -\sum_{y\in V}\nabla_{xy}f\frac{b(x,y)}{b(x)} = -\sum_{y\in V}\nabla_{xy}fp(x,y). \tag{4}$$

Oprócz tego,wprowadzimy następujące oznaczenie:

$$\begin{aligned}\Delta f(x) = -\mathcal{L}f(x) &= -\sum_{y\in V}\nabla_{xy}f\frac{b(x,y)}{b(x)} = -\sum_{y\in V}\nabla_{xy}fp(x,y)\\ &= \sum_{y\in V}(f(y) - f(x))\frac{b(x,y)}{b(x)} = \sum_{y\in V}(f(y) - f(x))p(x,y).\end{aligned}$$

Twierdzenie 2 (Formula Greena)**.** *Dla każdych dwóch funkcji $f, g : V \to \mathbb{R}$ i dla każdego $\emptyset \neq \Omega \subset V$ spełnią się następująca tożsamość:*

$$\sum_{x\in\Omega}\Delta_\rho f(x)g(x) = -\frac{1}{2}\sum_{x,y\in\Omega}(\nabla_{xy}f)(\nabla_{xy}g)\rho_{xy} + \sum_{x\in\Omega}\sum_{y\in V\setminus\Omega}(\nabla_{xy}f)g(x)\rho_{xy}. \tag{5}$$

Dowód.

$$\begin{aligned}\sum_{x\in\Omega}\Delta_\rho f(x)g(x) &= \sum_{x\in\Omega}\left(\sum_{y\in V}(f(y) - f(x))\rho_{xy}\right)g(x)\\ &= \sum_{x\in\Omega}\sum_{y\in V}(f(y) - f(x))g(x)\rho_{xy}\\ &= \sum_{x\in\Omega}\sum_{y\in\Omega}(f(y) - f(x))g(x)\rho_{xy} + \sum_{x\in\Omega}\sum_{y\in V\setminus\Omega}(f(y) - f(x))g(x)\rho_{xy}\\ &= \sum_{y\in\Omega}\sum_{x\in\Omega}(f(x) - f(y))g(y)\rho_{xy} + \sum_{x\in\Omega}\sum_{y\in V\setminus\Omega}(\nabla_{xy}f)g(x)\rho_{xy},\end{aligned}$$

gdzie w ostatnim wierszu zmieniliśmy notację zmiennych x i y w pierwszej sumie. Dodając do siebie ostatnie dwa wierszy i dzieląc przez 2, otrzymujemy(5). $\square$

Jeżeli $\Omega = V$, to $V \setminus \Omega$ jest zbiorem pustym , więc ostatni wyraz w (5) znika i otrzymujemy

$$\sum_{x\in V} \Delta_\rho f(x)g(x) = -\frac{1}{2} \sum_{x,y\in V} (\nabla_{xy} f)(\nabla_{xy} g)\rho_{xy}. \tag{6}$$

Następstwo 3. *Dla każdej funkcji $f : V \to \mathbb{R}$,*

$$\sum_{x\in V} \Delta_\rho f(x) = 0. \tag{7}$$

Dowód. Użyć (6) dla $g \equiv 1$. $\square$

3. Problem Dirichleta

Niech $\emptyset \neq B \subset V$ i $h : B \to \mathbb{R}$. Problem w postaci

$$\begin{cases} \Delta v(x) = 0 \text{ on } V \setminus B, \\ v|_B \equiv h, \end{cases} \tag{8}$$

nazywa się *problemem Dirichleta.* Ten problem jest dyskretną wersją ciągłego problemu Dirichleta.

Twierdzenie 4. *Problem Dirichleta* (8) *zawsze ma dokładnie jedno rozwiązanie $v : V \to \mathbb{R}$.*

Punktem kluczowym dla dowodu twierdzenia 4 jest następna lemma.

Lemat 5 (Zasada maksimuma i minimuma)**.** *Niech $\neq B \subset V$, takie że $V \setminus B \neq$. Wtedy dla każdej funkcji $u : V \to K$ dla której $\Delta u(x) > 0$ (tj. u jest* sub-harmoniczną*) na $V \setminus B$, spełnia się*

$$\max_{V\setminus B} u \leq \max_B u \tag{9}$$

oraz dla każdej funkcji$u : V \to K$ dla której $\Delta_\rho u(x) \preceq 0$ (tj. u jest superharmoniczną*) na $V \setminus B$, spełnia się*

$$\min_{V\setminus B} u \geq \min_B u. \tag{10}$$