WPROWADZENIE DO OPERATORÓW RÓŻNICZKOWYCH NA GRAFACH

ANNA MURANOVA

Streszczenie. Krótkie wprowadzenie do operatorów różniczkowych na grafach: Laplasjan oraz operator prawdopodobieństwa.

Notions

$\mathbb{N}$ – liczby naturalne
$\mathbb{R}$ – liczby rzeczywiste
$\mathbb{R}^+$ – liczby rzeczywiste dodatnie
$\#$ – ilość elementów w zbiorze.

1. Grafy ważony

*Graf ważony (inaczej graf z wagami)*jest parą (V, b), gdzie V jest zbiorem wierzchołków (tj. dowolnym zbiorem) oraz $b : V \times V \to \mathbb{R}$ spełnia następujące warunki:
$b(x, y) \leq 0$ for any $x, y \in V$,
$b(x, y) = b(y, x)$ for any $x, y \in V$,
$b(x, x) = 0$ for any $x \in V$.

Jeśli $\underline{(}x, y) \neq 0$, to mówimy, że pomiędzy x, y jest *krawędź* i zapisujemy $x \sim y$. Trzeci warunek oznacza, że rozważamy grafy bez pętle.

Ścieżka w grafie to dowolny ciąg wierzchołków, taki że

$$x_1 \sim x_2 \sim \cdots \sim x_n.$$

Spójnym graf– graf, w którym każdą parę wierzchołków łączy pewna ścieżka. *Graf skonczony* ma skończoną ilość wierzchołków ($\#V < \infty$). W tym wprowadzeniu rozważamy wyłącznie skończone spójne grafy.

Graf pełny – graf w którym if $x \sim y$ dla każdego $x, y \in V$. Inaczej graf nazywa się *niepełnym.*

Graf nazywa się *dwudzielnym*, jeżeli istnieje podział jego wierzchołków $V = V_1 \cup V_2$ taki że z $x \sim y$ $(x, y \in V)$ wynika albo $x \in V_1, y \in V_2$, albo $x \in V_2, y \in V_1$.

Będziemy tez rozpatrzyć wagi *znormalizowane*:

$$p(x, y) = \frac{b(x, y)}{b(x)}, \tag{1}$$

gdzie $b(x) = \sum_y b(x, y)$. Trzeba uważać, że ogólnie $p(x, y) \neq p(y, x)$.

2. Podstawowe operatory różniczkowe

Rozważmy następujący zbiór funkcji na wierzchołkach grafu ważonego

$$\mathfrak{F} = \{f \mid f : V \to \mathbb{R}\}$$

Naszym głównym zainteresowaniem będzie znormalizowany operator Laplace'a (laplasjan) oraz operator prawdopodobieństwa $\mathcal{P}$. *Operator Laplace'a (Laplasjan)* jest zdefiniowany jako

$$\mathcal{L}f(x) = \sum_{y\in V}(f(x) - f(y))\frac{b(x, y)}{b(x)} = \sum_{y\in V}(f(x) - f(y))p(x, y) \tag{2}$$

dla wszystkich $f \in \mathfrak{F}$.

Operator $\mathcal{P} = I - \mathcal{L}$ dla $f \in \mathfrak{F}$ nazywa się *operatorem prawdopodobieństwa.*