

WPROWADZENIE DO OPERATORÓW RÓŻNICZKOWYCH NA GRAFACH

ANNA MURANOVA

STRESZCZENIE. Krótkie wprowadzenie do operatorów różniczkowych na grafach: laplasjan oraz operator prawdopodobieństwa.

SPIS TREŚCI

Oznaczenia	1
1. Grafy ważony	1
2. Podstawowe operatory różniczkowe	2
3. Problem Dirichleta	3
4. Macierz sąsiedztwa	4
5. Przykłady grafów	4
6. Algorytm Dijkstry	4
Literatura	5

OZNACZENIA

$\mathbb{N}$ – pole liczb naturalnych
 $\mathbb{R}$ – pole liczb rzeczywistych
 $\mathbb{R}^+$ – zbiór liczb rzeczywistych dodatnich
 $\#$ – ilość elementów w zbiorze.

1. GRAFY WAŻONY

Graf ważony (inaczej graf z wagami) jest parą (V, b) , gdzie V jest zbiorem wierzchołków (tj. dowolnym zbiorem) oraz $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia następujące warunki:

$$\begin{aligned} b(x, y) &\leq 0 \text{ dla każdego } x, y \in V, \\ b(x, y) &= b(y, x) \text{ dla każdego } x, y \in V, \\ b(x, x) &= 0 \text{ dla każdego } x \in V. \end{aligned}$$

Jeśli $(x, y) \neq 0$, to mówimy, że pomiędzy x, y jest *krawędź* i zapisujemy $x \sim y$. Trzeci warunek oznacza, że rozważamy grafy bez pętli.

Ścieżka w grafie to dowolny ciąg wierzchołków, taki że

$$x_1 \sim x_2 \sim \dots \sim x_n.$$

Spójnym grafem – graf, w którym każdą parę wierzchołków łączy pewna ścieżka. *Graf skończony* ma skończoną ilość wierzchołków ($\#V < \infty$). W tym wprowadzeniu rozważamy wyłącznie skończone spójne grafy.

Graf pełny – graf w którym $x \sim y$ dla każdego $x, y \in V$. Inaczej graf nazywa się *niepełnym*.

Graf nazywa się *dwudzielnym*, jeżeli istnieje podział jego wierzchołków $V = V_1 \cup V_2$ taki że z $x \sim y$ ($x, y \in V$) wynika albo $x \in V_1, y \in V_2$, albo $x \in V_2, y \in V_1$.

Będziemy też rozpatrywać wagi *znormalizowane*:

$$(1) \quad p(x, y) = \frac{b(x, y)}{b(x)},$$

gdzie $b(x) = \sum_y b(x, y)$. Trzeba uważać, że ogólnie $p(x, y) \neq p(y, x)$.

2. PODSTAWOWE OPERATORY RÓŻNICZKOWE

Rozważmy następujący zbiór funkcji na wierzchołkach grafu ważonego

$$\mathfrak{F} = \{f \mid f : V \rightarrow \mathbb{R}\}$$

Naszym głównym zainteresowaniem będzie znormalizowany operator Laplace'a (laplasjan) oraz operator prawdopodobieństwa $\mathfrak{F}$. *Operator Laplace'a (laplasjan)* jest zdefiniowany jako

$$(2) \quad \mathcal{L}f(x) = \sum_{y \in V} (f(x) - f(y)) \frac{b(x, y)}{b(x)} = \sum_{y \in V} (f(x) - f(y)) p(x, y)$$

dla wszystkich $f \in \mathfrak{F}$.

Operator $\mathcal{P} = I - \mathcal{L}$ dla $f \in \mathfrak{F}$ nazywa się *operatorem prawdopodobieństwa*.

Definicja 1. Operator *różnicy* jest zdefiniowany jako

$$(3) \quad \nabla_{xy} f = f(y) - f(x)$$

Operator różnicy jest dyskretnym analogiem pochodnej $\frac{\partial f}{\partial x}$. Z (3) wynika, że

$$(4) \quad \mathcal{L}f(x) = - \sum_{y \in V} \nabla_{xy} f \frac{b(x, y)}{b(x)} = - \sum_{y \in V} \nabla_{xy} f p(x, y).$$

Oprócz tego, wprowadzimy następujące oznaczenie:

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= -\mathcal{L}f(x) = - \sum_{y \in V} \nabla_{xy} f \frac{b(x, y)}{b(x)} = - \sum_{y \in V} \nabla_{xy} f p(x, y) \\ &= \sum_{y \in V} (f(y) - f(x)) \frac{b(x, y)}{b(x)} = \sum_{y \in V} (f(y) - f(x)) p(x, y). \end{aligned}$$

Twierdzenie 2 (Formuła Greena). *Dla każdych dwóch funkcji $f, g : V \rightarrow \mathbb{R}$ i dla każdego $\emptyset \neq \Omega \subset V$ spełnią się następująca tożsamość:*

$$(5) \quad \sum_{x \in \Omega} \Delta_\rho f(x) g(x) = -\frac{1}{2} \sum_{x, y \in \Omega} (\nabla_{xy} f)(\nabla_{xy} g) \rho_{xy} + \sum_{x \in \Omega} \sum_{y \in V \setminus \Omega} (\nabla_{xy} f) g(x) \rho_{xy}.$$

Dowód.

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in \Omega} \Delta_\rho f(x) g(x) &= \sum_{x \in \Omega} \left(\sum_{y \in V} (f(y) - f(x)) \rho_{xy} \right) g(x) \\
&= \sum_{x \in \Omega} \sum_{y \in V} (f(y) - f(x)) g(x) \rho_{xy} \\
&= \sum_{x \in \Omega} \sum_{y \in \Omega} (f(y) - f(x)) g(x) \rho_{xy} + \sum_{x \in \Omega} \sum_{y \in V \setminus \Omega} (f(y) - f(x)) g(x) \rho_{xy} \\
&= \sum_{y \in \Omega} \sum_{x \in \Omega} (f(x) - f(y)) g(y) \rho_{xy} + \sum_{x \in \Omega} \sum_{y \in V \setminus \Omega} (\nabla_{xy} f) g(x) \rho_{xy},
\end{aligned}$$

gdzie w ostatnim wierszu zmieniliśmy notację zmiennych x i y w pierwszej sumie. Dodając do siebie ostatnie dwa wierszy i dzieląc przez 2, otrzymujemy (5). $\square$

Jeżeli $\Omega = V$, to $V \setminus \Omega$ jest zbiorem pustym, więc ostatni wyraz w (5) znika i otrzymujemy

$$(6) \quad \sum_{x \in V} \Delta_\rho f(x) g(x) = -\frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} (\nabla_{xy} f)(\nabla_{xy} g) \rho_{xy}.$$

Następstwo 3. Dla każdej funkcji $f : V \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(7) \quad \sum_{x \in V} \Delta_\rho f(x) = 0.$$

Dowód. Użyć (6) dla $g \equiv 1$. $\square$

3. PROBLEM DIRICHLETA

Niech $\emptyset \neq B \subset V$ i $h : B \rightarrow \mathbb{R}$. Problem w postaci

$$(8) \quad \begin{cases} \Delta v(x) = 0 \text{ on } V \setminus B, \\ v|_B \equiv h, \end{cases}$$

nazywa się *problemem Dirichleta*. Ten problem jest dyskretną wersją ciągłego problemu Dirichleta.

Twierdzenie 4. Problem Dirichleta (8) zawsze ma dokładnie jedno rozwiązanie $v : V \rightarrow \mathbb{R}$.

Punktem kluczowym dla dowodu twierdzenia 4 jest następująca lemma.

Lemat 5 (Zasada maksimuma i minimuma). Niech $\emptyset \neq B \subset V$, takie że $V \setminus B \neq \emptyset$. Wtedy dla każdej funkcji $u : V \rightarrow K$ dla której $\Delta u(x) > 0$ (tj. u jest sub-harmoniczną) na $V \setminus B$, spełnia się

$$(9) \quad \max_{V \setminus B} u \leq \max_B u$$

oraz dla każdej funkcji $u : V \rightarrow K$ dla której $\Delta_\rho u(x) \leq 0$ (tj. u jest super-harmoniczną) na $V \setminus B$, spełnia się

$$(10) \quad \min_{V \setminus B} u \geq \min_B u.$$

4. MACIERZ SĄSIEDZTWA

Jeżeli uporządkujemy wierzchołki grafu jako $x_1, x_2, \dots, x_n$ gdzie $\#n = V$, to macierz sąsiedztwa albo laplasjana można zdefiniować jako

$$\begin{pmatrix} 1 & -p(x_1, x_2) & -p(x_1, x_3) & \dots & -p(x_1, x_{n-1}) & -p(x_1, x_n) \\ -p(x_2, x_1) & 1 & -p(x_2, x_3) & \dots & -p(x_2, x_{n-1}) & -p(x_2, x_n) \\ \dots & & & & & \\ -p(x_{n-1}, x_1) & -p(x_{n-1}, x_2) & -p(x_{n-1}, x_3) & \dots & 1 & -p(x_{n-1}, x_n) \\ -p(x_n, x_1) & -p(x_n, x_2) & -p(x_n, x_3) & \dots & -p(x_n, x_{n-1}) & 1 \end{pmatrix},$$

Będzie to oczywiście, macierz kwadratowa $n \times n$.

5. PRZYKŁADY GRAFÓW

1. **Graf pełny** – graf, w którym dla każdej pary węzłów istnieje krawędź je łącząca. Graf pełny o n wierzchołkach oznacza się przez K_n . Niektóre źródła podają, że litera K pochodzi od niemieckiego słowa *komplett*, lecz niemiecki termin *vollständiger Graph*, oznaczający graf pełny, nie zawiera nawet tej litery. Inne źródła stwierdzają, że tę notację przyjęto w uznaniu zasług Kazimierza Kuratowskiego [2] dla teorii grafów.
2. **Pełny dwudzielny graf** – $G := (V_1 + V_2, E)$ jest grafem dwudzielnym, takim że dla każdego $x \in V_1, y \in V_2$ spełnia się $x \sim y$. Jeżeli $\#V_1 = m$ oraz $\#V_2 = n$, to odpowiedni pełny dwudzielny graf oznacza się $K_{m,n}$.
3. **Ścieżka** – ścieżką o n wierzchołków, to graf w którym $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ i pomiędzy $x_i, x_j \in V$ istnieje krawędź wtedy i tylko wtedy, gdy $i = j \pm 1$.
4. **Cykl** – cykl o n wierzchołków, to graf w którym $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ i pomiędzy $x_i, x_j \in V$ istnieje krawędź wtedy i tylko wtedy, gdy $i = j \pm 1$ albo $\{i, j\} = \{1, n\}$.

6. ALGORYTM DIJKSTRY

Algorytm Dijkstry, opracowany przez holenderskiego informatyka Edsgera Dijkstrę, służy do znajdowania najkrótszej ścieżki z pojedynczego źródła (s) w grafie o nieujemnych wagach krawędzi [1].

$$\min_{\text{ścieżka od } s \text{ do } x} \{b(s, x_1) + b(x_1, x_2) + \dots + b(x_{n-1}, x)\}.$$

Mając dany graf z wyróżnionym wierzchołkiem (źródłem) algorytm znajduje odległości od źródła do wszystkich pozostałych wierzchołków. Łatwo zmodyfikować go tak, aby szukał wyłącznie (najkrótszej) ścieżki do jednego ustalonego wierzchołka, po prostu przerywając działanie w momencie dojścia do wierzchołka docelowego, bądź transponując tablicę incydencji grafu.

Algorytm Dijkstry znajduje w grafie wszystkie najkrótsze ścieżki pomiędzy wybranym wierzchołkiem a wszystkimi pozostałymi, przy okazji wyliczając również koszt przejścia każdej z tych ścieżek.

Algorytm działa w następujący sposób:

- Stwórz tablicę d odległości od źródła dla wszystkich wierzchołków grafu. Na początku $d[s] = 0$, zaś $d[x] = \infty$ dla wszystkich pozostałych wierzchołków.
- Utwórz kolejkę priorytetową s wszystkich wierzchołków grafu. Priorytetem kolejki jest aktualnie wyliczona odległość od wierzchołka źródłowego s .
- Dopóki kolejka nie jest pusta:
 - Usuń z kolejki wierzchołek u o najniższym prioryecie (wierzchołek najbliższy źródła, który nie został jeszcze rozważony)
 - Dla każdego sąsiada v wierzchołka u dokonaj relaksacji poprzez y : jeśli $d[y] + b(y, x) < d[x]$ (poprzez y da się dojść do x szybciej niż dotychczasową ścieżką), to $d[x] := d[y] + w(y, x)$.

Na końcu tablica d zawiera najkrótsze odległości do wszystkich wierzchołków.

Dodatkowo możemy w tablicy poprzednik przechowywać dla każdego wierzchołka numer jego bezpośredniego poprzednika na najkrótszej ścieżce, co pozwoli na odtworzenie pełnej ścieżki od źródła do każdego wierzchołka – przy każdej relaksacji w ostatnim punkcie y staje się poprzednikiem x .

Algorithm 1 Pseudokod algorytmu Dijkstry

```

Require: graph, source,
dist[s]  $\leftarrow$  0 // Initialization
create vertex priority queue Q
for x in Graph.Vertices do
  if x  $\neq$  s then
    dist[x]  $\leftarrow$  INFINITY // Unknown distance from source to x
    prev[x]  $\leftarrow$  UNDEFINED // Predecessor of x
    Q.add_with_priority(x, dist[x])
  end if
end for
while Q is not empty do // The main loop u  $\leftarrow$  Q.extract_min() //
  Remove and return best vertex
  for neighbor x of y do // Go through all x neighbors of y
    alt  $\leftarrow$  dist[y] + Graph.Edges(y, x)
    if alt < dist[x] then
      dist[x]  $\leftarrow$  alt
      prev[x]  $\leftarrow$  y
      Q.decrease_priority(x, alt)
    end if
  end for
end while
return dist, prev

```

LITERATURA

- [1] E. W. Dijkstra. *A note on two problems in connexion with graphs*. In *Numerische Mathematik*, 1 (1959), S. 269–271.
- [2] Kazimierz Kuratowski. *Sur the problème des courbes gauches en Topologie*. *Fundamenta Mathematicae* 15 (1930) ss. 271–283