

WPROWADZENIE DO OPERATORÓW RÓŻNICZKOWYCH NA GRAFACH

ANNA MURANOVA

STRESZCZENIE. Krótkie wprowadzenie do operatorów różniczkowych na grafach: laplasjan oraz operator prawdopodobieństwa.

OZNACZENIA

$\mathbb{N}$ – pole liczb naturalnych
 $\mathbb{R}$ – pole liczb rzeczywistych
 $\mathbb{R}^+$ – zbiór liczb rzeczywistych dodatnich
 $\#$ – ilość elementów w zbiorze.

1. GRAFY WĄŻONY

Graf ważony (inaczej graf z wagami) jest parą (V, b) , gdzie V jest zbiorem wierzchołków (tj. dowolnym zbiorem) oraz $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia następujące warunki:

$b(x, y) \leq 0$ dla każdego $x, y \in V$,
 $b(x, y) = b(y, x)$ dla każdego $x, y \in V$,
 $b(x, x) = 0$ dla każdego $x \in V$.

Jeśli $(x, y) \neq 0$, to mówimy, że pomiędzy x, y jest *krawędź* i zapisujemy $x \sim y$. Trzeci warunek oznacza, że rozważamy grafy bez pętli.

Ścieżka w grafie to dowolny ciąg wierzchołków, taki że

$$x_1 \sim x_2 \sim \cdots \sim x_n.$$

Spójny graf – graf, w którym każdą parę wierzchołków łączy pewna ścieżka. *Graf skończony* ma skończoną ilość wierzchołków ($\#V < \infty$). W tym wprowadzeniu rozważamy wyłącznie skończone spójne grafy.

Graf pełny – graf w którym $x \sim y$ dla każdego $x, y \in V$. Inaczej graf nazywa się *niepełnym*.

Graf nazywa się *dwudzielnym*, jeżeli istnieje podział jego wierzchołków $V = V_1 \cup V_2$ taki że z $x \sim y$ ($x, y \in V$) wynika albo $x \in V_1, y \in V_2$, albo $x \in V_2, y \in V_1$.

Będziemy też rozpatrywać wagi *znormalizowane*:

$$(1) \quad p(x, y) = \frac{b(x, y)}{b(x)},$$

gdzie $b(x) = \sum_y b(x, y)$. Trzeba uważać, że ogólnie $p(x, y) \neq p(y, x)$.

2. PODSTAWOWE OPERATORY RÓŻNICZKOWE

Rozważmy następujący zbiór funkcji na wierzchołkach grafu ważonego

$$\mathfrak{F} = \{f \mid f : V \rightarrow \mathbb{R}\}$$

Naszym głównym zainteresowaniem będzie znormalizowany operator Laplace'a (laplasjan) oraz operator prawdopodobieństwa $\mathfrak{F}$. *Operator Laplace'a (laplasjan)* jest zdefiniowany jako

$$(2) \quad \mathcal{L}f(x) = \sum_{y \in V} (f(x) - f(y)) \frac{b(x, y)}{b(x)} = \sum_{y \in V} (f(x) - f(y)) p(x, y)$$

dla wszystkich $f \in \mathfrak{F}$.

Operator $\mathcal{P} = I - \mathcal{L}$ dla $f \in \mathfrak{F}$ nazywa się *operatorem prawdopodobieństwa*.

Definicja 1. Operator *różnicy* jest zdefiniowany jako

$$(3) \quad \nabla_{xy} f = f(y) - f(x)$$

Operator różnicy jest dyskretnym analogiem pochodnej $\frac{\partial f}{\partial x}$. Z (3) wynika, że

$$(4) \quad \mathcal{L}f(x) = - \sum_{y \in V} \nabla_{xy} f \frac{b(x, y)}{b(x)} = - \sum_{y \in V} \nabla_{xy} f p(x, y).$$

Oprócz tego, wprowadzimy następujące oznaczenie:

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= -\mathcal{L}f(x) = - \sum_{y \in V} \nabla_{xy} f \frac{b(x, y)}{b(x)} = - \sum_{y \in V} \nabla_{xy} f p(x, y) \\ &= \sum_{y \in V} (f(y) - f(x)) \frac{b(x, y)}{b(x)} = \sum_{y \in V} (f(y) - f(x)) p(x, y). \end{aligned}$$

Twierdzenie 2 (Formuła Greena). *Dla każdych dwóch funkcji $f, g : V \rightarrow \mathbb{R}$ i dla każdego $\emptyset \neq \Omega \subset V$ spełnią się następująca tożsamość:*

$$(5) \quad \sum_{x \in \Omega} \Delta_\rho f(x) g(x) = -\frac{1}{2} \sum_{x, y \in \Omega} (\nabla_{xy} f)(\nabla_{xy} g) \rho_{xy} + \sum_{x \in \Omega} \sum_{y \in V \setminus \Omega} (\nabla_{xy} f) g(x) \rho_{xy}.$$

Dowód.

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \Omega} \Delta_\rho f(x) g(x) &= \sum_{x \in \Omega} \left(\sum_{y \in V} (f(y) - f(x)) \rho_{xy} \right) g(x) \\ &= \sum_{x \in \Omega} \sum_{y \in V} (f(y) - f(x)) g(x) \rho_{xy} \\ &= \sum_{x \in \Omega} \sum_{y \in \Omega} (f(y) - f(x)) g(x) \rho_{xy} + \sum_{x \in \Omega} \sum_{y \in V \setminus \Omega} (f(y) - f(x)) g(x) \rho_{xy} \\ &= \sum_{y \in \Omega} \sum_{x \in \Omega} (f(x) - f(y)) g(y) \rho_{xy} + \sum_{x \in \Omega} \sum_{y \in V \setminus \Omega} (\nabla_{xy} f) g(x) \rho_{xy}, \end{aligned}$$

gdzie w ostatnim wierszu zmieniliśmy notację zmiennych x i y w pierwszej sumie. Dodając do siebie ostatnie dwa wiersze i dzieląc przez 2, otrzymujemy (5). $\square$

Jeżeli $\Omega = V$, to $V \setminus \Omega$ jest zbiorem pustym, więc ostatni wyraz w (5) znika i otrzymujemy

$$(6) \quad \sum_{x \in V} \Delta_{\rho} f(x) g(x) = -\frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} (\nabla_{xy} f)(\nabla_{xy} g) \rho_{xy}.$$

Następstwo 3. Dla każdej funkcji $f : V \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(7) \quad \sum_{x \in V} \Delta_{\rho} f(x) = 0.$$

Dowód. Użyć (6) dla $g \equiv 1$. $\square$

3. PROBLEM DIRICHLETA

Niech $\emptyset \neq B \subset V$ i $h : B \rightarrow \mathbb{R}$. Problem w postaci

$$(8) \quad \begin{cases} \Delta v(x) = 0 \text{ on } V \setminus B, \\ v|_B \equiv h, \end{cases}$$

nazywa się *problemem Dirichleta*. Ten problem jest dyskretną wersją ciągłego problemu Dirichleta.

Twierdzenie 4. Problem Dirichleta (8) zawsze ma dokładnie jedno rozwiązanie $v : V \rightarrow \mathbb{R}$.

Punktem kluczowym dla dowodu twierdzenia 4 jest następująca lemma.

Lemat 5 (Zasada maksimuma i minimuma). Niech $\emptyset \neq B \subset V$, takie że $V \setminus B \neq \emptyset$. Wtedy dla każdej funkcji $u : V \rightarrow K$ dla której $\Delta u(x) > 0$ (tj. u jest sub-harmoniczną) na $V \setminus B$, spełnia się

$$(9) \quad \max_{V \setminus B} u \leq \max_B u$$

oraz dla każdej funkcji $u : V \rightarrow K$ dla której $\Delta_{\rho} u(x) \leq 0$ (tj. u jest super-harmoniczną) na $V \setminus B$, spełnia się

$$(10) \quad \min_{V \setminus B} u \geq \min_B u.$$