

WPROWADZENIE DO OPERATORÓW RÓŻNICZKOWYCH NA GRAFACH

ANNA MURANOVA

STRESZCZENIE. Krótkie wprowadzenie do operatorów różniczkowych na grafach: Laplasjan oraz operator prawdopodobieństwa.

NOTIONS

$\mathbb{N}$ – pole liczb naturalnych
 $\mathbb{R}$ – pole liczb rzeczywistych
 $\mathbb{R}^+$ – zbiór liczb rzeczywistych dodatnich
 $\#$ – ilość elementów w zbiorze.

1. GRAFY WAŻONY

Graf ważony (inaczej graf z wagami) jest parą (V, b) , gdzie V jest zbiorem wierzchołków (tj. dowolnym zbiorem) oraz $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia następujące warunki:

$b(x, y) \leq 0$ for any $x, y \in V$,
 $b(x, y) = b(y, x)$ for any $x, y \in V$,
 $b(x, x) = 0$ for any $x \in V$.

Jeśli $(x, y) \neq 0$, to mówimy, że pomiędzy x, y jest *krawędź* i zapisujemy $x \sim y$. Trzeci warunek oznacza, że rozważamy grafy bez pętli.

Ścieżka w grafie to dowolny ciąg wierzchołków, taki że

$$x_1 \sim x_2 \sim \dots \sim x_n.$$

Spójnym grafem – graf, w którym każdą parę wierzchołków łączy pewna ścieżka. *Graf skończony* ma skończoną ilość wierzchołków ($\#V < \infty$). W tym wprowadzeniu rozważamy wyłącznie skończone spójne grafy.

Graf pełny – graf w którym $x \sim y$ dla każdego $x, y \in V$. Inaczej graf nazywa się *niepełnym*.

Graf nazywa się *dwudzielnym*, jeżeli istnieje podział jego wierzchołków $V = V_1 \cup V_2$ taki że z $x \sim y$ ($x, y \in V$) wynika albo $x \in V_1, y \in V_2$, albo $x \in V_2, y \in V_1$.

Będziemy też rozpatrywać wagi *znormalizowane*:

$$(1) \quad p(x, y) = \frac{b(x, y)}{b(x)},$$

gdzie $b(x) = \sum_y b(x, y)$. Trzeba uważać, że ogólnie $p(x, y) \neq p(y, x)$.

2. PODSTAWOWE OPERATORY RÓŻNICZKOWE

Rozważmy następujący zbiór funkcji na wierzchołkach grafu ważonego

$$\mathfrak{F} = \{f \mid f : V \rightarrow \mathbb{R}\}$$

Naszym głównym zainteresowaniem będzie znormalizowany operator Laplace'a (laplasjan) oraz operator prawdopodobieństwa $\mathcal{P}$. *Operator Laplace'a (Laplasjan)* jest zdefiniowany jako

$$(2) \quad \mathcal{L}f(x) = \sum_{y \in V} (f(x) - f(y)) \frac{b(x, y)}{b(x)} = \sum_{y \in V} (f(x) - f(y)) p(x, y)$$

dla wszystkich $f \in \mathfrak{F}$.

Operator $\mathcal{P} = I - \mathcal{L}$ dla $f \in \mathfrak{F}$ nazywa się *operatorem prawdopodobieństwa*.