

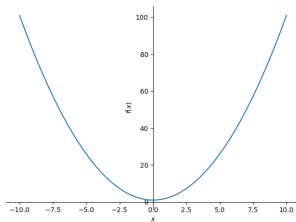
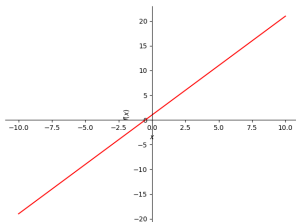
Matematyczne aspekty analizy danych

semestr zimowy 2025/2026

Dr Anna Muranova
UWM w Olsztynie

Wykład 3

Wykresy



Kody:

```
from sympy import *  
x = symbols('x')
```

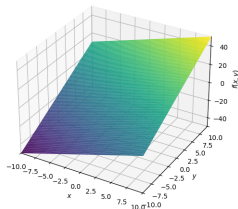
```
f = 2*x+1  
plot(f, line_color='red')
```

```
plot (x**2 +1)
```

Uwaga: możliwe, że trzeba zainstalować matplotlib i w ustawieniach na komputerach w pracowni

File->Settings->Tools->Python Scientific->Show plots in tool window

Wykresy 3d



Kod:

```
from sympy import *  
from sympy.plotting import plot3d
```

```
x, y = symbols('x y')
```

```
f = 2*x + 3*y  
plot3d(f)
```

Uwaga: możliwe, że trzeba zainstalować matplotlib i w ustawieniach na komputerach w pracowni

File->Settings->Tools->Python Scientific->Show plots in tool window

Podstawowe funkcje elementarne

Podstawowe funkcje elementarne obejmują funkcje:

- ▶ stałe $f(x) = \text{const}$,
- ▶ potęgowe $f(x) = x^r$,
- ▶ wykładnicze $f(x) = a^x$,
- ▶ logarytmiczne $f(x) = \log_a x$
- ▶ trygonometryczne $f(x) = \sin(x)$ i td,
- ▶ cyklometryczne (funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych)
 $f(x) = \arccos(x)$ td

Rodzaje funkcje elementarnych

Funkcje, które można otrzymać z podstawowych funkcji elementarnych za pomocą skończonej ilości działań arytmetycznych oraz operacji złożenia funkcji nazywamy **funkcjami elementarnymi**.

- ▶ wielomianowa: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$
 - ▶ liniowa $f(x) = ax + b, a \neq 0$
 - ▶ kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$
- ▶ wymierna: $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \dots + b_1 x + b_0}$
- ▶ hiperboliczne, nprz: $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
https://pl.wikipedia.org/wiki/Funkcje_hiperboliczne
- ▶ polowe (odwrotne do hiperbolicznych), nprz. $\operatorname{arcsinh} = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
https://pl.wikipedia.org/wiki/Funkcje_hiperboliczne_odwrotne
- ▶ funkcja Gaussa

$$f_{\mu, \sigma}(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Funkcje nieelementarne

- ▶ funkcja znaku (signum)
- ▶ podłoga
- ▶ sufit,
- ▶ część ułamkowa (mantysa)
- ▶ funkcja Dirichleta

$$1_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{dla } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

- ▶ Funkcja Γ (zwana też funkcją gamma Eulera) – funkcja specjalna, która rozszerza pojęcie silni na zbiór liczb rzeczywistych i zespolonych. Jeżeli x część rzeczywista liczby zespolonej $z = x + iy$ jest dodatnia, to

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad x > 0$$

Funkcja wykładnicza e^x

Szczególnym przypadkiem funkcji wykładniczej jest ta o podstawie równej e – podstawie logarytmu naturalnego. Innym oznaczeniem takiej funkcji jest $\exp(x)$ nazywane krótko eksponensem.

Inna definicja eksponensa:

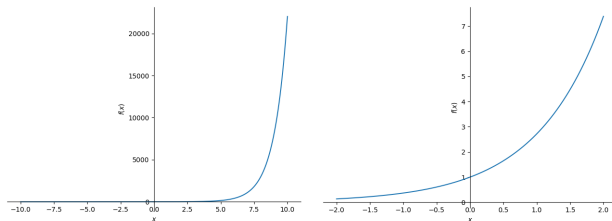
$$e^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

```
import math
```

```
print(math.exp(1e-5) - 1) # gives result accurate to 11 places
print(math.expm1(1e-5) )
```

Oprócz tego `math.exp(x)` dokładniej niż `math.e ** x` oraz `pow(math.e, x)`.

Funkcja wykładnicza e^x w sympy



Kody:

```
from sympy import *
```

```
x = symbols('x')
```

```
f = exp(x)
```

```
plot(f)
```

```
plot(f, (x, -2, 2))
```


Granice

Granica funkcji – wartość, do której obrazy danej funkcji zbliżają się nieograniczenie dla argumentów dostatecznie bliskich wybranemu punktowi.
Na przykład,

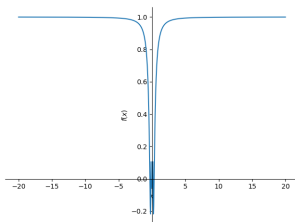
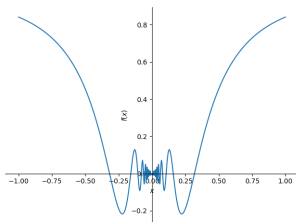
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Granice w symy



Kody:

```
from sympy import *
```

```
x = symbols('x')
```

```
f = x*sin(1/x)
```

```
plot(f, (x, -1, 1))
```

```
plot(f, (x, -20, 20))
```

```
print(Limit(f, x, 0).doit())
```

```
print(Limit(f, x, +oo).doit())
```

Pochodne

Pochodne są bardzo ważne w analizie danych. Często używa się ich w uczeniu maszynowym i innych algorytmach matematycznych, zwłaszcza w metodzie gradientu prostego. Kiedy nachylenie jest równe 0, to oznacza, że osiągnęliśmy minimum lub maksimum zmiennej wyjściowej. Koncepcja ta jest przydatna w regresji liniowej, regresji logistycznej i sieciach neuronowych.

Pochodna funkcji – nieformalnie: miara szybkości funkcji, czyli tempa zmian jej wartości względem zmian jej argumentów.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Obliczenie pochodnej, korzystając z definicji 1

Oblicz pochodną funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie $x_0 = 2$, korzystając z definicji.

Rozwiązanie:

Liczymy wartość pochodnej w punkcie x_0 , korzystając z definicji:

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4 + h) = 4 \end{aligned}$$

Obliczenie pochodnej, korzystając z definicji 2

Możemy również policzyć z definicji wzór ogólny pochodnej dla tej funkcji ($f(x) = x^2$):

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x \end{aligned}$$

Czyli ostatecznie:

$$f'(x) = 2x$$

Można też napisać równoważnie:

$$(x^2)' = 2x$$

Korzystając z tak wyliczonego wzoru, możemy teraz obliczyć wartość pochodnej w dowolnym punkcie, np.:

$$f'(2) = 2 \cdot 2 = 4, f'(0) = 2 \cdot 0 = 0, f'(-5) = 2 \cdot (-5) = -10$$

Praktycznie zawsze opłaca się najpierw policzyć pochodną funkcji (zwłaszcza, że mamy do dyspozycji gotowe wzory na liczenie pochodnych), a dopiero potem wyznaczyć jej wartość w konkretnym punkcie.

Kalkulator pochodnych napisany w Pythonie

```
def pochodna_x(f, x, rozmiar_kroku):  
    m = (f(x + rozmiar_kroku) - f(x)) / rozmiar_kroku  
    return m  
  
def moja_funkcja(x):  
    return x**2  
  
nachylenie_w_punkcie_2 = pochodna_x (moja_funkcja, 2, 0.00001)  
print(nachylenie_w_punkcie_2)
```

Wynik: 4.0000100000027032

Tabela pochodnych ważniejszych funkcji elementarnych

Nazwa funkcji	Wzór funkcji i wzór jej pochodnej
funkcja stała	$(c)' = 0$
funkcja potęgowa, $\alpha \neq 0$	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
pierwiastek kwadratowy, tzn. $\alpha = \frac{1}{2}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
funkcja wykładnicza, $a > 0, a \neq 1$	$(a^x)' = a^x \ln a$
funkcja wykładnicza o podstawie e	$(e^x)' = e^x$
funkcja logarytmiczna, $a > 0, a \neq 1$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
logarytm naturalny, tzn. $a = e$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
sinus	$(\sin x)' = \cos x$
cosinus	$(\cos x)' = -\sin x$
tangens	$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
cotangens	$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$
arkus sinus	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
arkus cosinus	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
arkus tangens	$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
arkus cotangens	$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
sinus hiperboliczny	$(\sinh x)' = \cosh x$
cosinus hiperboliczny	$(\cosh x)' = \sinh x$

Ważniejsze reguły obliczenia pochodnych

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

Przykład obliczenia pochodnych

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}} \right)' = \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^{\frac{-2}{3}} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)' \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^{\frac{-2}{3}} ((1+x^2)^{-1})' = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^{\frac{-2}{3}} (-(1+x^2)^{-2}) (1+x^2)' \\ &= \frac{1}{3} (1+x^2)^{\frac{2}{3}} (-(1+x^2)^{-2} 2x) = -\frac{1}{3} (1+x^2)^{\frac{-4}{3}} 2x \\ &= -\frac{2x}{\sqrt[3]{(1+x^2)^4}} \end{aligned}$$

Przykład obliczenia pochodnych w sympy

```
from sympy import *
```

```
x = symbols('x')
```

```
f1 = x**2
```

```
print(diff(f1))
```

```
print(diff(f1).subs(x,3))
```

```
f2 = pow(1/(1+x**2), Rational(1,3))
```

```
print(diff(f2))
```

```
f2 = pow(1/(1+x**2), 1/3)
```

```
print(diff(f2))
```

```
2*x
```

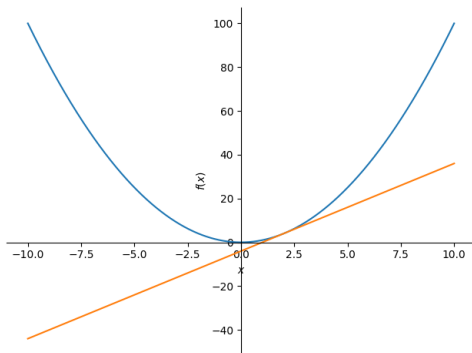
```
6
```

```
-2*x*(1/(x**2 + 1))**(1/3)/(3*(x**2 + 1))
```

```
-0.6666666666666667*x*(1/(x**2 + 1))**0.333333333333333/(x**2 + 1)
```

Prosta styczna

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad x \in \mathbb{R}$$



Prosta styczna, kod

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad x \in \mathbb{R}$$

```
from sympy import *

x = symbols('x')

f = x**2
der1 = diff(f)
x0 = 2

line = f.subs(x,x0) + der1.subs(x,x0)*(x-x0)
p1 = plot(f, show=False)
p2 = plot(line, show=False)

p1.extend(p2)
p1.show()
```

Pochodne cząstkowe

(Funkcje wiele zmiennych)

Przykład:

$$f(x) = 2x^3 + 3y^2 + xz$$

► $\frac{d}{dx} - y, z \text{ jako stałe: } \frac{df}{dx} = 6x^2 + z$

► $\frac{d}{dy} - x, z \text{ jako stałe: } \frac{df}{dy} = 6y$

► $\frac{d}{dz} - x, y \text{ jako stałe: } \frac{df}{dz} = x$

► $\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (6x^2 + z) = 12x$

► $\frac{d^2}{dx dy} = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dy} \right) = \frac{d}{dx} (6y) = 0$

► $\frac{d^2}{dy dx} = \frac{d}{dy} \left(\frac{df}{dx} \right) = \frac{d}{dy} (6x^2 + x) = 0$

Pochodne cząstkowe w sympy

(Funkcje wiele zmiennych)

Przykład:

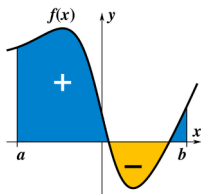
$$f(x) = 2x^3 + 3y^2 + xz$$

```
from sympy import *  
  
x, y, z = symbols('x,y,z')  
  
f = 2*x**3+3*y**2+x*z  
#print(diff(f))#blad  
print(diff(f, x))#6*x**2 + z  
print(diff(f, y))#6*y  
print(diff(f, z))#x  
print(diff(diff(f,x), x))#12*z  
print(diff(diff(f,x), y))#0  
print(diff(diff(f,y), x))#0
```

Całki (oznaczone)

Intuicyjnie całka oznaczona to pole powierzchni między wykresem funkcji $f(x)$ w pewnym przedziale $[a, b]$ a osią odciętych, wzięte ze znakiem plus dla dodatnich wartości funkcji i minus dla ujemnych. Pojęcie całki oznaczonej, choć intuicyjnie proste, może być sformalizowane na wiele sposobów. Jeśli jakaś funkcja jest całkowalna według dwóch różnych definicji całki oznaczonej, wynik całkowania będzie taki sam.

$$\int_a^b f(x) dx.$$



Całkowanie w sympy

```
from sympy import *  
  
x = symbols('x')  
f = x**2 + 1  
  
F = integrate(f)#x**3/3 + x  
  
print(F)  
print(F.subs(x,1) - F.subs(x,0))#4/3  
  
pole= integrate(f,(x,0,1))#4/3  
  
print(pole)
```

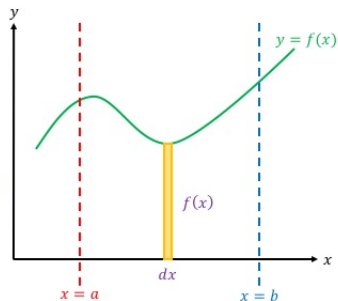
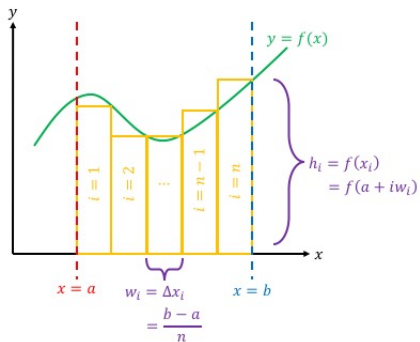

Obliczenie

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a), \text{ gdzie } F'(x) = f(x)$$

Przykład:

$$\int_0^1 (x^2 + 1) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{1}{3}1^3 + 1 \right) - \left(\frac{1}{3}0^3 + 0 \right) = \frac{4}{3} \approx 1.3333333$$

Całki – przybliżone obliczenia



Całki – przybliżone obliczenia w Python

```
def przybliz_calke(a, b, n, f):  
    delta_x = (b-a)/n  
    suma = 0  
  
    for i in range(1, n + 1):  
        pkt_srodkowy = 0.5*(2*a + delta_x*(2*i-1))  
        suma += f(pkt_srodkowy)  
  
    return suma*delta_x  
  
def moja_funkcja(x):  
    return x**2+1  
  
pole = przybliz_calke(0, 1, n=1000, f=moja_funkcja)  
print(pole)#1.3333332500000001
```

Prawdopodobieństwo

- ▶ w znaczeniu potocznym szansa na wystąpienie jakiegoś zdarzenia.

W rozumieniu potocznym wyraz „prawdopodobieństwo” odnosi się do oczekiwania względem rezultatu zdarzenia, którego wynik nie jest znany (niezależnie od tego, czy jest ono w jakimś sensie zdeterminowane, miało miejsce w przeszłości, czy dopiero się wydarzy); w ogólności należy je rozumieć jako pewną miarę przewidywalności bądź pewności względem zjawiska (przy danej o nim wiedzy), co umożliwia ocenę potencjalnie związanego z nim ryzyka.

- ▶ natomiast w matematycznej teorii prawdopodobieństwa rodzina miar służących do opisu częstości lub pewności tego zdarzenia.

Prawdopodobieństwo w sensie matematycznym służy do modelowania doświadczeń losowych poprzez przypisanie poszczególnym zdarzeniom losowym liczb, zwykle z przedziału jednostkowego (często wyrażanych procentowo: od 0 do 100%), wskazujących szanse ich zajścia.

Prawdopodobieństwo a statystyka

- ▶ *Prawdopodobieństwo* – to czysto teoretyczne, niewymagające żadnych danych rozważanie, jaka jest szansa na wystąpienia pewnego zdarzenia.
- ▶ *Statystyka* natomiast nie może istnieć bez danych, które wykorzystuje do odkrywania prawdopodobieństw, oraz dostarcza narzędzi do opisu danych.

Prawdopodobieństwo a statystyka: rzut kości

Mamy sześćcian. Chcemy dowiedzieć się prawdopodobieństwo czwórki.

- *Prawdopodobieństwo* – zakładamy, jaki jest sześćcian (nprz. uczciwy).

$$P(4) = 1/6.$$

- *Statystyka*: rzucamy sześćcian dużo razy. Zakładamy, że

$$P(4) = \frac{\text{Ilość czwórek}}{\text{Ilość rzutów}}.$$

Prawdopodobieństwo a statystyka: rzut kości

Mamy sześciian. Chcemy dowiedzieć się:

$$P(\{\text{liczba parzysta}\}) = ?$$

- *Prawdopodobieństwo* – zakładamy, jaki jest sześciian (model matematyczny):

$$P(\{\text{liczba parzysta}\}) = P(2) + P(4) + P(6)$$

- *Statystyka*: rzucamy sześciian dużo razy. Zakładamy, że

$$P(1) = \frac{\text{Ilość jedynek}}{\text{Ilość rzutów}}$$

i td. Wtedy używamy naszego modelu:

$$P(\{\text{liczba parzysta}\}) = P(2) + P(4) + P(6)$$

Prawdopodobieństwo

Oto kilka pytań na które można odpowiedzieć poprzez podania prawdopodobieństwa:

- ▶ Jaka jest szansa, że w 10 uczciwych rzutach wypadnie 7 orłów?
- ▶ Jakiej mam szansy na wygraną wyborów?
- ▶ Czy mój lot będzie opóźniony?
- ▶ Na ile mam pewność, że pewien produkt jest wadliwy?

Matematyczne interpretacje

Istnieje wiele matematycznych interpretacji pojęcia prawdopodobieństwa, między innymi tzw. :

- ▶ obiektywne (częstościowe), jako obiektywną częstość zdarzenia w dużej liczbie prób losowych,
- ▶ subiektywne (bayesowskie, od nazwiska T. Bayesa), jako reprezentację subiektywnej pewności, uzyskanej na podstawie dotychczasowej wiedzy i zaobserwowanych danych.

Prawdopodobieństwo matematyczne: przykład

- ▶ Jaki jest prawdopodobieństwo, że w jednym rzucie uczciwym wypadnie reszka:

$$X = \{\text{wypadnie reszka}\}$$

$$P(X) = P(\{\text{wypadnie reszka}\}) = 1/2 = 0.5(50\%)$$

$$P(\{\text{nie wypadnie reszka}\}) = 1/2 = 0.5(50\%)$$

$$P(\{\text{wypadnie reszka}\}) + P(\{\text{nie wypadnie reszka}\}) = 1$$

Prawdopodobieństwo matematyczne: przykład

- ▶ Jaki jest prawdopodobieństwo, że w trzech rzutach uczciwych wypadnie dokładnie dwie reszki:

OOO

OOR

ORO

ORR

ROO

ROR

RRO

RRR

$$P(\{\text{wypadnie dokładnie dwie reszki}\}) = 3/8$$

Uwaga!

$$P(\{\text{wypadnie co najmniej dwie reszki}\}) = 4/8$$

Szansa: przykład

- Szansa ze w rzucie uczciwym wypadnie reszka jest taka sama, jak ta, że ona nie wypadnie:

$$O(X) = O(\{\text{wypadnie reszka}\}) = 1.$$

- Szansa ze w trzech rzutach uczciwych wypadnie dokładnie dwie reszki jest

$$\begin{aligned} O(\{\text{wypadnie dokładnie 2 reszki}\}) &= \frac{P(\{\text{wypadnie dokładnie 2 reszki}\})}{P(\{\text{wypadnie inna ilość reszek niż 2}\})} \\ &= \frac{P(\{\text{wypadnie dokładnie 2 reszki}\})}{1 - P(\{\text{wypadnie dokładnie 2 reszki}\})} = \frac{3/8}{1 - 3/8} = \frac{3}{8 - 3} = 3/5 \end{aligned}$$

Szansa

$$O(X) = \frac{P(X)}{1 - P(X)}$$

$$P(X) = \frac{O(X)}{1 + O(X)}$$

Szansa jest użyteczna w statystyce Bayes'a, a także w regresjach logarytmicznych z logarytmem szansy.

Prawdopodobieństwo łącznie 1

Dla zdarzeń A i B prawdopodobieństwo $P(A \text{ oraz } B) = P(A \cap B)$ nazywa się *prawdopodobieństwem łącznym*.

Jeżeli zdarzenia A i B są niezależne, to

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Przykład: rzucamy uczciwy sześćcian i uczciwą monetą:

$$P(\{\text{czwórka oraz reszka}\}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

Prawdopodobieństwo łącznie 2

Dla zdarzeń A i B prawdopodobieństwo $P(A \cap B)$ nazywa się *prawdopodobieństwem łącznym*.

Jeżeli zdarzenia A i B są niezależne, to

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Przykład (zdarzenia zależne): rzucamy uczciwy sześcián:

$$A = \{\text{liczba parzysta}\}, B = \{2\}$$

$$P(A) = 1/3, P(B) = 1/6$$

$$P(A \cap B) = 1/6.$$

Prawdopodobieństwo łącznie 3

Matematycznie zdarzenia A i B **nazywają się** niezależnymi, jeśli

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Przykład: rzucamy uczciwy sześcián:

$$A = \{\text{liczba parzysta}\}, B = \{\text{liczba, podzielna przez trzy}\}$$

$$P(A) = 1/2, P(B) = 1/3$$

$$P(A \cap B) = P(\{\text{liczba parzysta, podzielna przez 3}\}) = P(6) = 1/6.$$

Zdarzenia są niezależnymi!

Prawdopodobieństwo alternatywne 1

Dla zdarzeń A i B , zdarzenie A *lub* B nazywa się *sumą* zdarzeń, a $P(A \text{ lub } B) = P(A \cup B)$ – *prawdopodobieństwem sumy zdarzeń* lub *prawdopodobieństwem alternatywnym*.

Jeżeli zdarzenia są wzajemnie wykluczającymi ($P(A \cap B)=0$), to

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Przykład: rzucamy uczciwy sześćcian:

$$A = \{2\}, B = \{3\}$$

$$P(A) = 1/6, P(B) = 1/6$$

$$P(2 \cap 3) = 0.$$

$$P(2 \cup 3) = 1/6 + 1/6 = 1/3.$$

Zdarzenia nie są niezależnymi!

Prawdopodobieństwo alternatywne 2

Dla zdarzeń A i B , zdarzenie A *lub* B nazywa się *sumą* zdarzeń, a $P(A \cup B)$ – *prawdopodobieństwem sumy zdarzeń* lub *prawdopodobieństwem alternatywnym*.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Przykład: rzucamy uczciwy sześcián:

$$A = \{\text{liczba parzysta}\}, B = \{\text{liczba, podzielna przez trzy}\}$$

$$P(A) = 1/2, P(B) = 1/3$$

$$P(A \cap B) = P(\{\text{liczba parzysta, podzielna przez 3}\}) = P(6) = 1/6.$$

$$P(A \cup B) = P(\{2, 3, 4, 6\}) = 1/2 + 1/3 - 1/6 = 4/6 = 2/3.$$

Prawdopodobieństwo alternatywne 3

Przykład: rzucamy uczciwy sześcián i uczciwą monetą:

$$A = \{\text{liczba parzysta na sześciánie}\}, B = \{\text{reszka i dwójka}\}$$

1O, 2O, 3O, 4O, 5O, 6O, 1R, 2R, 3R, 4R, 5R, 6R

$$P(A) = 1/2, P(B) = 1/12$$

$$P(A \cap B) = 1/12.$$

$$P(A \cup B) = 1/2.$$

Czy są niezależne?

Czy są wzajemnie wykluczającymi?

A jeżeli

$$B = \{\text{reszka i trojka}\}?$$

$$B = \{\text{reszka}\}$$