Matematyczne aspekty analizy danych
semestr zimowy 2024/2025

Dr Anna Muranova
UWM w Olsztynie

Wykład 8

Wektory w $\mathbb{R}^n$

Zbiór

$$\mathbb{R}^n = \{\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \mid x_i in \mathbb{R}\}$$

z dodawaniem definiowanym dla każdych $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ oraz $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ jako:

$$\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

i mnożeniem na liczby, definiowanym jako:

$$a\overline{x} = (a \cdot x_1, \ldots, a \cdot x_n) \text{ dla każdego } a \in \mathbb{R},$$

jest *przestrzenią wektorową*.

Uwaga! Nie można dodawać do siebie wektorów z rożnych przestrzeni wektorowych!

Wektor

Właściwości:

1. Dodawanie wektorów jest łączne, tj. dla dowolnych $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in V$ jest $\overline{u}+(\overline{v}+\overline{w}) = (\overline{u}+\overline{v})+\overline{w}$.
2. Dodawanie wektorów jest przemienne, tj. dla dowolnych $\overline{v}, \overline{w} \in V$ jest $\overline{v}+\overline{w} = \overline{w}+\overline{v}$.
3. Dodawanie wektorów ma element neutralny, tj. istnieje taki element $\overline{0} \in V$, nazywany wektorem zerowym, że dla dowolnego $\overline{v} \in V$ jest $\overline{v}+\overline{0} = \overline{v}$.
4. Dodawanie wektorów ma elementy przeciwne, tj. dla każdego $\overline{v} \in V$ istnieje element $\overline{w} \in V$, nazywany wektorem przeciwnym do $\overline{v}$, taki że $\overline{v}+\overline{w} = \overline{0}$.
5. Mnożenie przez skalar jest rozdzielne względem dodawania wektorów, tj. dla każdego $a \in \mathbb{R}$ oraz $\overline{v}, \overline{w} \in V$ jest $a(\overline{v}+\overline{w}) = a\overline{v}+a\overline{w}$.
6. Mnożenie przez wektor jest rozdzielne względem dodawania skalarów, tj. dla każdych $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $\overline{v} \in V$ zachodzi $(a + b)\overline{v} = a\overline{v}+b\overline{v}$.
7. Mnożenie przez skalar jest zgodne z mnożeniem liczb, tj. dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $\overline{v} \in V$ jest $a(b\overline{v}) = (a \cdot b)\overline{v}$.
8. Dla dowolnego $\overline{v} \in V$ zachodzi $1 \cdot \overline{v} = \overline{v}$.

Wektor

Przykłady na tablice.

Wektory w numpy

```
import numpy as np

# vector as row
vector1 = np.array([1, 2, 3])

# vector as column
vector2 = np.array([[10],
                    [20],
                    [30]])

print(vector1)
print(vector2)
print(2*vector1)
print(vector1+vector1)
print(2*vector2)
print(vector2+vector2)
```

Wektory w sympy

```
import sympy as sp

# vector as row
vector1 = sp.Matrix([1, 2, 3])

# vector as column
vector2 = sp.Matrix([[10],
                     [20],
                     [30]])



print(vector1)
print(vector2)
print(2*vector1)
print(vector1+vector1)
print(2*vector2)
print(vector2+vector2)
```

Wektory: liniowa zależność i baza

Wektory $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots \overline{v}_n$ przestrzeni V nazywany są *liniowo niezależnymi*, gdy zachodzi wynikanie:
Jeśli $a_1\overline{v}_1 + a_2\overline{v}_2 + \cdots + a_n\overline{v}_n = \overline{0}$, to $a_i = 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, n,$.

Bazą przestrzeni V nazywa się liniowo niezależny zbiór wektorów $v_1, v_2, \ldots, v_n$, który rozpina przestrzeń V, tzn. każdy wektor $v \in V$ może być zapisany jako $\sum_i^n a_i v_i$ dla niektorych $a_i \in \mathbb{R}^n$.

Na przykład, wektory

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$$
$$e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$$
$$e_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

są baza w $\mathbb{R}^n$.

Theorem
W $\mathbb{R}^n$ każde n liniowo niezależnych wektorów są bazą.

Przykład 1

Wektory $(1,1)$ i $(-3,2)$ z $\mathbb{R}^2$ są liniowo niezależne. Rzeczywiście, niech a_1 oraz a_2 będą takimi liczbami rzeczywistymi, że

$$(1,1)a_1 + (-3,2)a_2 = (0,0).$$

Biorąc każdą współrzędną z osobna, uzyskuje się układ równań z niewiadomymi a_1 i a_2:

$$\begin{cases} a_1 - 3a_2 = 0, \\ a_1 + 2a_2 = 0. \end{cases}$$

Jedynymi rozwiązaniami tego układu są $a_1 = 0$ i $a_2 = 0$, co potwierdza liniową niezależność wektorów.

Przykład 2

Podzbiór przestrzeni $\mathbb{R}^4$ złożony z wektorów jest liniowo zależny.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Należy znaleźć takie liczby rzeczywiste a_1, a_2, a_3, nie wszystkie równe zeru, że

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} a_1 + 7a_2 - 2a_3 = 0, \\ 4a_1 + 10a_2 + a_3 = 0, \\ 2a_1 - 4a_2 + 5a_3 = 0, \\ -3a_1 - a_2 - 4a_3 = 0, \end{cases}$$

uzyskuje się

$$\begin{cases} a_1 = -\frac{3}{2} a_3, \\ a_2 = \frac{1}{2} a_3. \end{cases}$$

Wektory: liniowa zależność i wyznacznik

Wektory $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots \overline{v}_n$ przestrzeni $-\mathbb{R}^n$ są liniowo niezależnymi, wtedy i tylko wtedy, kiedy

$$\det(v_1, \ldots v_n) = 0$$

Np. dla wektorów $(1, 1)$ i $(-3, 2)$ z $\mathbb{R}^2$ odpowiednia macierz ma postać

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ponieważ

$$\det A = 1 \cdot 2 - 1 \cdot (-3) = 5 \neq 0,$$

więc wektory te są liniowo niezależne.

Macierz przejścia między bazami

Niech $U = \{\overline{u}_1, \dots, \overline{u}_n\}$ i $V = \{\overline{v}_1, \dots, \overline{v}_n\}$ będą dwoma bazami tej samej przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Niech $t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie przekształceniem liniowym, które przekształca bazę E na bazę V, tzn. $t(\overline{u}_i) = \overline{v}_i$ Macierz T przekształcenia t w bazie U nazywamy macierzą przejścia od bazy U do bazy V.

Macierz tę wyznaczamy zatem z równości:

$$v_1 = \alpha_1^1 u_1 + \alpha_1^2 u_2 + \dots + \alpha_1^n u_n,$$

$$v_2 = \alpha_2^1 u_1 + \alpha_2^2 u_2 + \dots + \alpha_2^n u_n,$$

$$\vdots$$

$$v_n = \alpha_n^1 u_1 + \alpha_n^2 u_2 + \dots + \alpha_n^n u_n.$$

Czyli mamy

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \cdots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \cdots & \alpha_n^n \end{pmatrix}.$$

Przykład cz.1

W przestrzeni $\mathbb{R}^3$, znaleźć macierz przejścia z bazy U do bazy V, gdzie

$$U = \{(0,1,0), (-1,0,0), (0,0,2)\},$$

$$V = \{(1,1,1), (0,1,2), (0,0,-1)\}.$$

Rozwiązanie: Zgodnie z powyższą definicją, obliczamy:

$$v_1 = (1,1,1) = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = \alpha(0,1,0) + \beta(-1,0,0) + \gamma(0,0,2).$$

Zatem dostajemy równość

$$(1,1,1) = (-\beta, \alpha, 2\gamma),$$

co daje nam

$$\alpha = 1, \quad \beta = -1, \quad \gamma = \frac{1}{2}.$$

Obliczone współczynniki tworzą pierwszą kolumnę szukanej macierzy przejścia S.

Przykład cz.2

Następnie:

$$v_2 = (0,1,2) = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = \alpha(0,1,0) + \beta(-1,0,0) + \gamma(0,0,2).$$

Zatem dostajemy równość

$$(0,1,2) = (-\beta, \alpha, 2\gamma),$$

co daje nam

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 1.$$

Obliczone współczynniki tworzą drugą kolumnę szukanej macierzy przejścia S.

Przykład cz.3

I na koniec:

$$v_3 = (0,0,-1) = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = \alpha(0,1,0) + \beta(-1,0,0) + \gamma(0,0,2).$$

Zatem dostajemy równość

$$(0,0,-1) = (-\beta, \alpha, 2\gamma),$$

co daje nam

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -\frac{1}{2}.$$

Obliczone współczynniki tworzą trzecią kolumnę szukanej macierzy przejścia S. Składając razem powyższe rozwiązania, dostajemy szukaną macierz przejścia z bazy U do bazy V:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Współrzędne wektora w dwóch bazach

Twierdzenie. Niech w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ będą dane dwie bazy $U = \{u_i\}$ i $V = \{v_i\}$. Niech wektor $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ ma współrzędne $\{\alpha_i\}$ w bazie U oraz współrzędne $\{\beta_i\}$ w bazie V. Jeśli S jest macierzą przejścia od bazy U do bazy V, to zachodzi wzór:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Macierz odwrotna S^{-1} (zawsze istnieje) jest macierzą przejścia od bazy V do U, oraz zachodzi wzór:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

- S_{UV} — macierz przejścia z bazy U do bazy V;
- S_{VU} — macierz przejścia z bazy V do bazy U;
- $X_U = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ — współrzędne wektora $\overline{x}$ w bazie U;
- $X_V = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ — współrzędne wektora $\overline{x}$ w bazie V;

mamy następujące wzory:

$$X_V = S_{VU} X_U,$$
$$X_V = S_{UV}^{-1} X_U,$$
$$X_U = S_{UV} X_V,$$
$$X_U = S_{VU}^{-1} X_V.$$

Ponadto, zachodzi:

$$S_{UV} = S_{VU}^{-1},$$
$$S_{VU} = S_{UV}^{-1}.$$

Przykład

W przestrzeni $\mathbb{R}^2$ mamy dane dwie bazy:

$$U = \{(0,1),(1,1)\},$$

$$V = \{(2,2),(2,0)\}.$$

Mając współrzędne wektora $X_U = [1,2]$ w bazie U przejść do jego współrzędnych X_V w bazie V. Zrobić to na dwa sposoby: wprost oraz licząc macierz przejścia S_{VU}. Wprost:

$$\overline{x} = 1 \cdot (0,1) + 2 \cdot (1,1) = (2,3) = a(2,2) + b(2,0), *$$

skąd $a = \frac{3}{2}, b = \frac{-1}{2}$.

$$*\overline{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie

Obliczamy macierz przejścia S_{VU}:

$$u_1 = (0,1) = \alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha(2,2) + \beta(2,0) = (2\alpha + 2\beta, 2\alpha).$$

Zatem mamy równość

$$(0,1) = (2\alpha + 2\beta, 2\alpha),$$

co daje:

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = -\frac{1}{2}.$$

Podobnie dla u_2:

$$u_2 = (1,1) = \alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha(2,2) + \beta(2,0) = (2\alpha + 2\beta, 2\alpha).$$

Zatem mamy równość

$$(1,1) = (2\alpha + 2\beta, 2\alpha),$$

co daje: $\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = 0$.
Zatem

$$S_{VU} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Ostatecznie obliczamy:

$$X_V = S_{VU} X_U = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie w numpy

```
import numpy as np

xu = np.array([1,2])
u = np.array([[0,1],[1,1]])
v = np.array([[2,2],[2,0]])
x = u@xu
print(x)
#u @ xu = x = v @ xv
xv = np.linalg.inv(v)@x
print(xv)
svu =  np.linalg.inv(v)@u
print(svu)
```

Rozwiązanie w sympy

```
import sympy as sp

xu = sp.Matrix([1,2])
xu.transpose()
u = sp.Matrix([[0,1],[1,1]])
v = sp.Matrix([[2,2],[2,0]])
x = u*xu
print(x)
#u * xu = x = v * xv
xv = v.inv()*x
print(xv)
svu =  v.inv()*u
print(svu)
```

Przekształcenie liniowe

Przekształcenie liniowe jest to funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ między przestrzeniami liniowymi zachowująca ich działania w tym sensie, że:

- odwzorowanie sumy wektorów z jednej przestrzeni w drugą jest równe sumie odwzorowań poszczególnych wektorów tej sumy,
- odwzorowanie iloczynu wektora przez skalar jest równe iloczynowi skalara przez odwzorowanie danego wektora.

Powyższe warunki można połączyć w jeden, równoważny z nimi warunek liniowości

$$f(c\,\overline{x} + d\,\overline{y}) = c\,f(\overline{x}) + d\,f(\overline{y}).$$

Przekształcenie liniowe

Każde przekształcenie liniowe między $\mathbb{R}^n$ oraz $\mathbb{R}^m$ można przedstawić za pomocą macierzy $m \times n$,. Np.: jeśli

$$(1,0,0) \to (1,2), (0,1,0) \to (1,1), (0,0,1) \to (1,0),$$

to dla

$$\overline{x} = (2,3,1) = 2 \cdot (1,0,0) + 3 \cdot (0,1,0) + 1 \cdot (0,0,1)$$

mamy

$$f(\overline{x}) = 2 \cdot (1,2) + 3 \cdot (1,1) + 1 \cdot (1,0) = (6,7)$$

Co można zapisać jako:

$$f(\overline{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tzn. macierz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

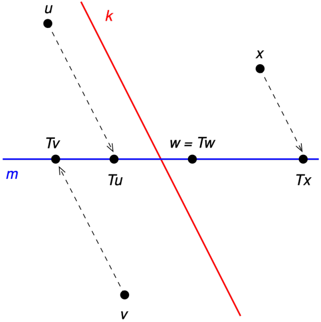
odpowiada przekształceniu f.

Rzut

Niech dana będzie przestrzeń liniowa $\mathbb{R}^n$ (nad ustalonym ciałem). Przekształcenie liniowe $P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tej przestrzeni w siebie spełniające warunek idempotentności

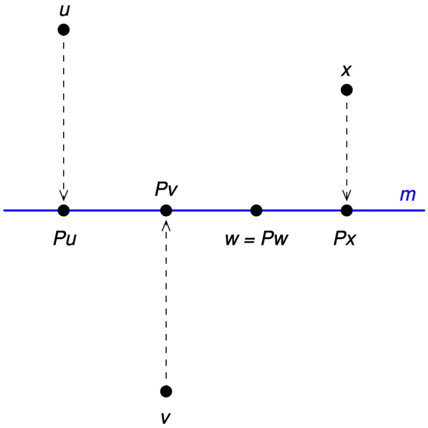
$$P^2 = P,$$

czyli $P\big(P(\overline{v})\big) = P(\overline{v})$ dla każdego $\overline{v} \in V$ nazywa się rzutem (ukośnym) lub projekcją.



Rzut T wzdłuż prostej k na prostą m.
Źródło: `https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1329674`

Rzut



Rzut ortogonalny P na prostą *m*.
Źródło: `https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1329670`
W tym kontekście rzut ukośny nazywa się *operatorem idempotentnym*, a *rzut ortogonalny* znany jest jako operator rzutowy.

Przykłady

- Przekształcenie tożsamościowe jest rzutem ortogonalnym reprezentowanym przez macierz jednostkową, np. $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ (operator jednostkowy jest operatorem rzutowym).
- Przekształcenie liniowe, którego macierz ma postać $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, jest rzutem ortogonalnym, podczas gdy zadane macierzą $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ jest rzutem (ukośnym), ale nie ortogonalnym (pierwsza macierz opisuje operator rzutowy, druga – tylko idempotentny).

Przykład

Ortogonalny rzut na prostą $x = y$ ma macierz

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Wektory i wartości własne.

Niezerowy wektor v nazywamy *wektorem własnym* macierzy M, jeśli $Mv = \lambda v$ dla pewnej liczby λ. Liczbę λ nazywamy *wartością własną* macierzy M. Mówimy tez, ze wektor v należy do wartości własnej λ.

Inaczej, wektor własny macierzy, to taki niezerowy wektor, który nie zmienia kierunku po przekształceniu.

Przykład 1

Znaleźć wartości i wektory własne macierzy

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie. Wartości własne:

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

jest równoważne układowi równań

$$\begin{cases} 6x + 3y = \lambda x, \\ 2x + 5y = \lambda y, \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} (6-\lambda)x + 3y = 0, \\ 2x + (5-\lambda)y = 0. \end{cases}$$

Układ równań ma niezerowe rozwiązanie, o ile równania są do siebie proporcjonalne (liniowo zależne), co można ująć w postaci równania

$$0 = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 3 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(5-\lambda) - 2 \cdot 3 = \lambda^2 - 11\lambda + 24,$$

skąd $\lambda = 3 \quad \text{lub} \quad \lambda = 8.$

Przykład 1: wektory własne

Dla każdej z wartości własnych znajdziemy wektor własny (tutaj wystarczy jeden).

Dla $\lambda = 3$:

$$6x + 3y = 3x \implies 3x + 3y = 0 \implies x = -y,$$

więc wektor własny to

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dla $\lambda = 8$:

$$6x + 3y = 8x \implies -2x + 3y = 0 \implies 2x = 3y,$$

więc wektor własny to

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Algorytm: wartości własne

Szukamy λ taki ze $|A - \lambda \boldsymbol{I}| = 0$. Szukamy wektory własne $|A - \lambda \boldsymbol{I}|\overline{x} = \overline{b}$.

Znaleźć wartości i wektory własne macierzy

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ -3 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(na tablice, $\lambda = 1, 2, 3$)