Matematyczne aspekty analizy danych
semestr zimowy 2024/2025

Dr Anna Muranova
UWM w Olsztynie

Wykład 4

Rozkład dwumianowy: prosty przykład

- Jaki jest prawdopodobieństwo, że w trzech rzutach uczciwych:

0. nie wypadnie żadnej reszki
1. wypadnie dokładnie jedna reszka
2. wypadnie dwie reszki
3. wypadnie trzy reszki

OOO
OOR
ORO
ORR
ROO
ROR
RRO
RRR

0. nie wypadnie żadnej reszki – 1/8
1. wypadnie dokładnie jedna reszka – 3/8
2. wypadnie dwie reszki – 3/8
3. wypadnie trzy reszki – 1/8

Rozkład dwumianowy: przykład

- Jaki jest prawdopodobieństwo, że w trzech rzutach:

0. nie wypadnie żadnej reszki
1. wypadnie dokładnie jedna reszka
2. wypadnie dwie reszki
3. wypadnie trzy reszki

jeżeli prawdopodobieństwo reszki jest p?

OOO – p^3
OOR – $p(1-p)^2$
ORO – $p(1-p)^2$
ORR – $p^2(1-p)$
ROO – $p(1-p)^2$
ROR – $p^2(1-p)$
RRO – $p^2(1-p)$
RRR – p^3

0. nie wypadnie żadnej reszki – $(1-p)^3$
1. wypadnie dokładnie jedna reszka – $3p(1-p)^2$
2. wypadnie dwie reszki – $3p^2(1-p)$
3. wypadnie trzy reszki – p^3

Rozkład dwumianowy

- Jaki jest prawdopodobieństwo, że w n rzutach wypadnie k reszek?

  Trzeba wybrać k miejsc w ciągu n prób. Wtedy prawdopodobieństwa wystąpienia ciągu, gdzie na wybranych miejscach jest reszki, a na innych orły jest $p^k(1-p)^{n-k}$.

  Liczba możliwości wybrania n miejsc w ciągu długości k oznacza się $\binom{n}{k}$

  i wynosi:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}{k(k-1)\cdots 1} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

  Takim czynem, prawdopodobieństwo, że w n rzutach wypadnie k reszek jest $\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$

Rozkład dwumianowy: definicja

Skończony ciąg niezależnych powtórzeń tego samego doświadczenia o dwóch możliwych wynikach nazywamy *schematem Bernoulliego*.

Możliwe wyniki pojedynczego zdarzenia oznaczymy jako 1 (sukces) oraz 0 (porażka). Niech prawdopodobieństwo sukcesu wynosi p (wówczas prawdopodobieństwo porażki wynosi $1 - p$).

Prawdopodobieństwo pojawienia się dokładnie k sukcesów w schemacie n prób Bernoulliego nazywa się *rozkładem dwumianowym* i wynosi

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

gdzie p oznacza prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczej próbie.

Rozkład dwumianowy: jeszcze przykład

- Jaki jest prawdopodobieństwo, że w 10 rzutach uczciwych kostki wypadnie 6 razy liczba, podzielna przez 3?

$p = 1/3, n = 10, k = 6$

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{10}{6} (1/3)^6 (1-1/3)^{10-6} = 0.056$$

```
import math
print(math.factorial(10)/(math.factorial(6)*
math.factorial(4))*(1/3)**6*(2/3)**(4))
```

Rozkład dwumianowy: Python

$p = 1/3, n = 10, k = 6$

```
import sympy
from sympy.stats import Binomial, density


print(sympy.binomial(10,6)*(1/3)**6*(2/3)**(4))
X = Binomial('X', 10, 1/3, succ=1, fail=0)
print(density(X).dict)
print(density(X).dict[6])
```

0.056901895036325 7

{0: 0.017341529915832 6, 1: 0.086707649579163 1, 2: 0.195092211553117, 3: 0.260122948737489, 4: 0.227607580145303, 5: 0.136564548087182, 6: 0.056901895036325 8, 7: 0.016257684296093 1, 8: 0.003048315805517 45, 9: 0.000338701756168606, 10: 1.69350878084303e-5}

0.056901895036325 8

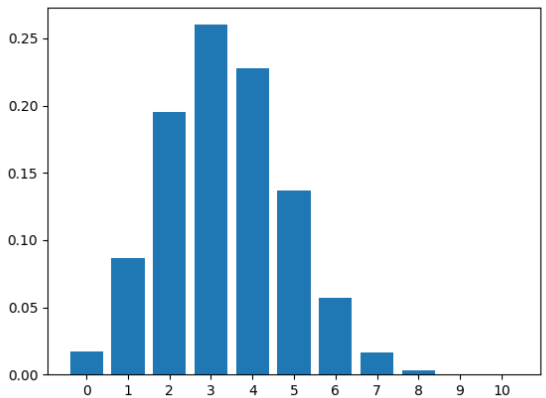
Rozkład dwumianowy: wykres

```
import matplotlib.pyplot as plt
from sympy.stats import Binomial, density

X = Binomial('X', 10, 1/3, succ=1, fail=0)
data = density(X).dict

names = list(data.keys())
values = list(data.values())

plt.bar(range(len(data)), values, tick_label=names)
plt.show()
```



Rozkład dwumianowy: definicja

Skończony ciąg niezależnych powtórzeń tego samego doświadczenia o dwóch możliwych wynikach nazywamy *schematem Bernoulliego*.

Możliwe wyniki pojedynczego zdarzenia oznaczymy jako 1 (sukces) oraz 0 (porażka). Niech prawdopodobieństwo sukcesu wynosi p (wówczas prawdopodobieństwo porażki wynosi $1 - p$).

Prawdopodobieństwo pojawienia się dokładnie k sukcesów w schemacie n prób Bernoulliego nazywa się *rozkładem dwumianowym* i wynosi

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

gdzie p oznacza prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczej próbie.

Przykład: rozważanie o rozkładzie dwumianowym

Przypuśćmy, że pracujesz nad nowym silnikiem turboodrzutowym i przeprowadziłeś 10 testów. Wynikiem są osiem sukcesów i dwa niepowodzenia:

$$x \quad v \quad v \quad v \quad v \quad v \quad v \quad x \quad v \quad v$$

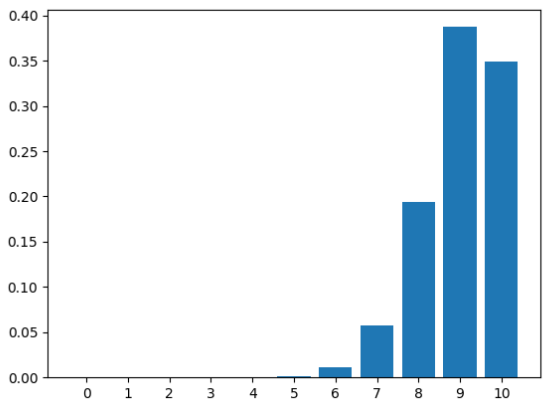
Liczyłeś na 90-procentowy wskaźnik sukcesu, ale na podstawie tych danych dochodzisz do wniosku, że testy zawiodły, ponieważ sukcesem zakończyło się tylko 80% prób.
Ile naprawdę wynosi prawdopodobieństwo uzyskać 8 sukcesów z 10 (przy prawdopodobieństwie sukcesu 0.9)?

$$0.193710244500000$$

Przykład: rozważanie o rozkładzie dwumianowym

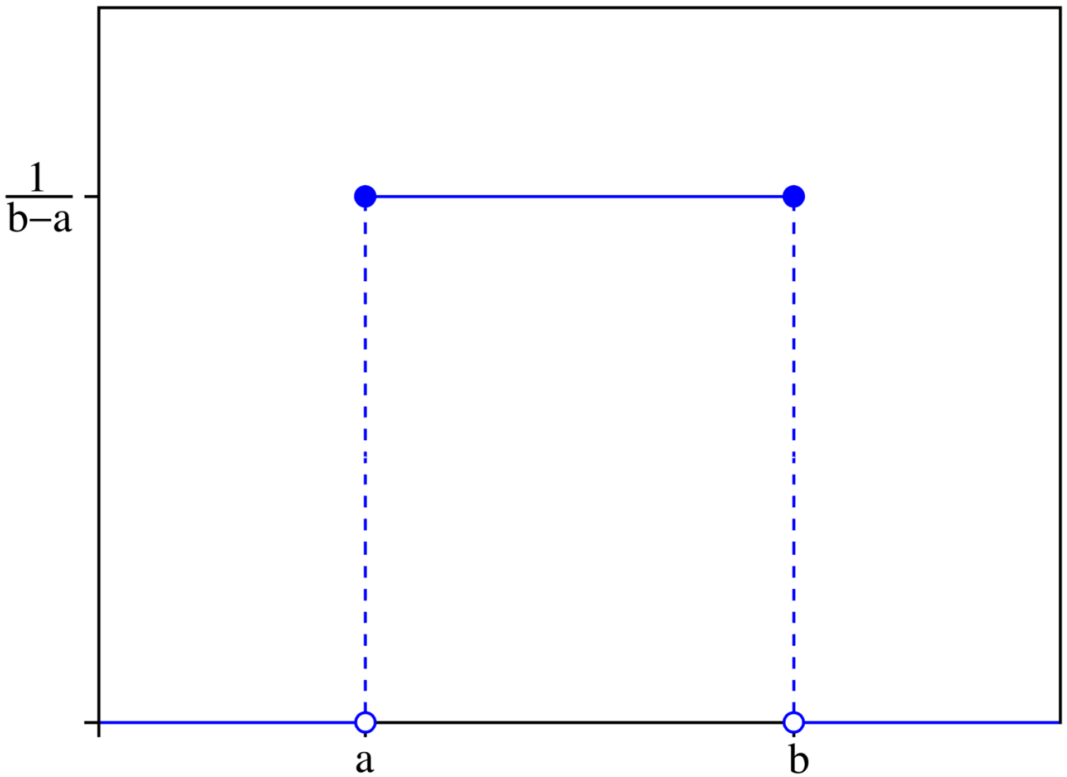
```
import matplotlib.pyplot as plt
from sympy.stats import Binomial, density

X = Binomial('X', 10, 0.9, succ=1, fail=0)
data = density(X).dict
names = list(data.keys())
values = list(data.values())
print(density(X).dict[8])#0.193710244500000
plt.bar(range(len(data)), values, tick_label=names)
plt.show()
```



Rozkład jednostajny i funkcja gęstości

Nich x przyjmuje wartości rzeczywiste na $[0, 1]$ (lub $[a, b]$), wszystkie z równym prawdopodobieństwem. Z jakim?
Funkcja **gęstości**:



Domenapubliczna,https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=117047

Rozkład beta

Musimy jakoś odwrócić ten model. Jak oszacować wiarygodność sukcesu po liczbie sukcesów w probie?
Rozkład beta pozwala nam sprawdzić, jaki jest prawdopodobieństwo różnych bazowych prawdopodobieństw zajścia zdarzenia przy α sukcesów i β niepowodzeniach.
Rozkład beta jest zdefiniowany przy pomocy funkcji **gęstości**

$$f(\alpha, \beta, x) = c_{\alpha,\beta} \cdot x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$

$$c_{\alpha,\beta} = \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)},$$

– stała, gdzie B jest funkcją beta, Γ – funkcją gamma.

Funkcje Gamma i beta

Funkcja B (*funkcja beta*) zwana też całką Eulera pierwszego rodzaju – funkcja specjalna określona dla liczb $x > 0, y > 0$ takich że ich części rzeczywiste są dodatnie, dana wzorem

$$\mathrm{B}(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt.$$

Funkcja Γ (zwana też funkcją gamma Eulera) – funkcja specjalna, która rozszerza pojęcie silni na zbiór liczb rzeczywistych i zespolonych. Jeżeli $x > 0$, to

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt.$$

Funkcje Gamma i Beta: wzory

- Dla liczb naturalnych: $\Gamma(n+1) = n!$,
- Dla dowolnych liczb mamy:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)} = \frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}.$$

- Dla każdego $x, y > 0$ zachodzi:

$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

- Dla liczb naturalnych m, n zachodzi:

$$\mathrm{B}(n,m) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-1)!}$$

- Dla każdego $x, y > 0$ zachodzi:

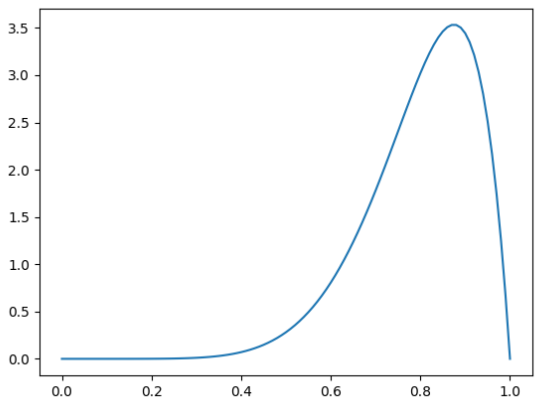
$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\, dt$$

Funkcja gęstości

Rozkład beta jest zdefiniowany przy pomocy funkcji **gęstości**

$$f(\alpha, \beta, x) = c_{\alpha,\beta} \cdot x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$

$\alpha = 8, \beta = 2$



Ponieważ parametr θ liczby sukcesów może być każdą liczbą rzeczywistą od 0 do 1, a liczb tych jest nieskończone wiele, to prawdopodobieństwo definiuje się dla zakresów:

$$P(a < \theta < b) = \int_a^b f(\alpha, \beta, x)\, dx.$$

Wykres w Pythonie

Wykres w Pythonie:

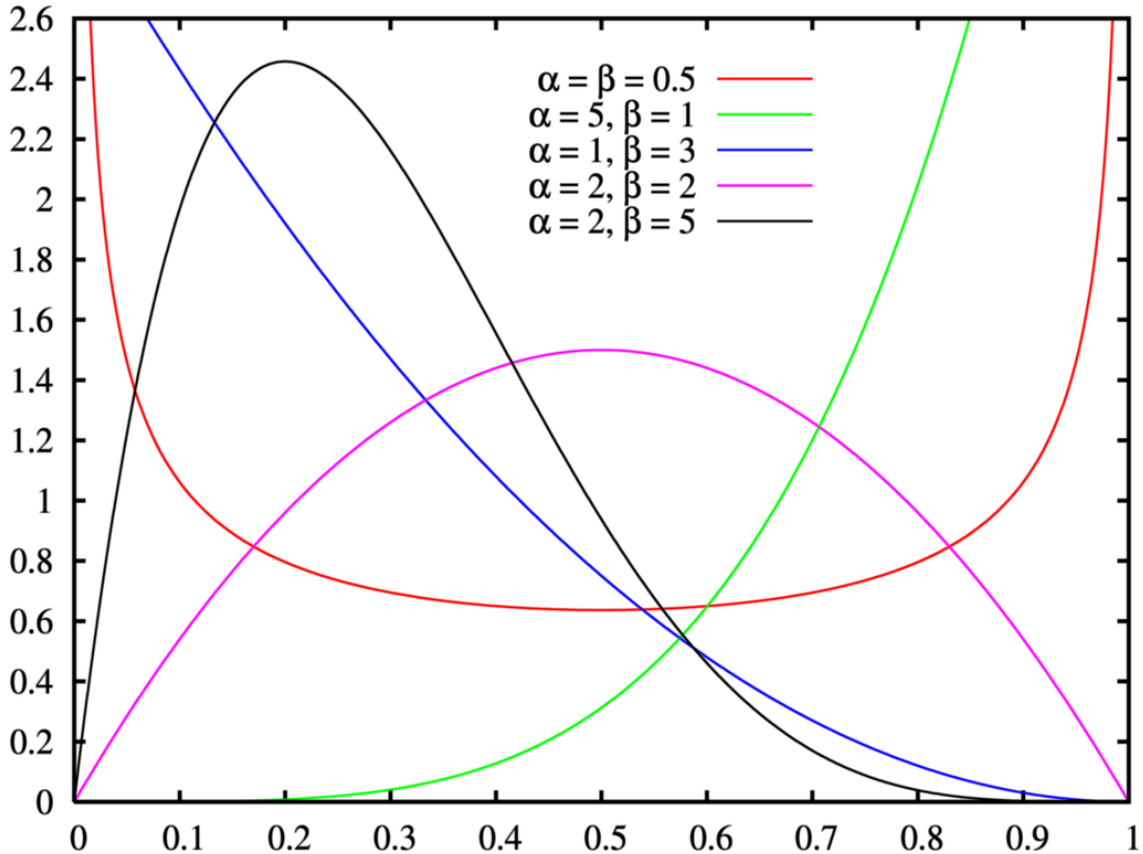
```
from sympy.stats import Beta, density
import matplotlib.pyplot as plt
from sympy import*

alpha = 8
beta = 2
X = Beta("X", alpha, beta)
x = symbols('x')
print(density(X)(x))#x**7*(1 - x)/beta(8, 2)
x0 = [i/100 for i in range (0,101)]
y0 = [density(X)(i).evalf() for i in x0]
plt.plot(x0,y0)
plt.show()
```

Obliczenia, ze $0.85 < \theta < 0.95$:

```
print(integrate(density(X)(x),(x, 0.85,0.95)).evalf())#0.32930944871875
#Uwaga:
print(integrate(density(X)(x),(x, 0,1)).evalf())#1.00000000000000
```

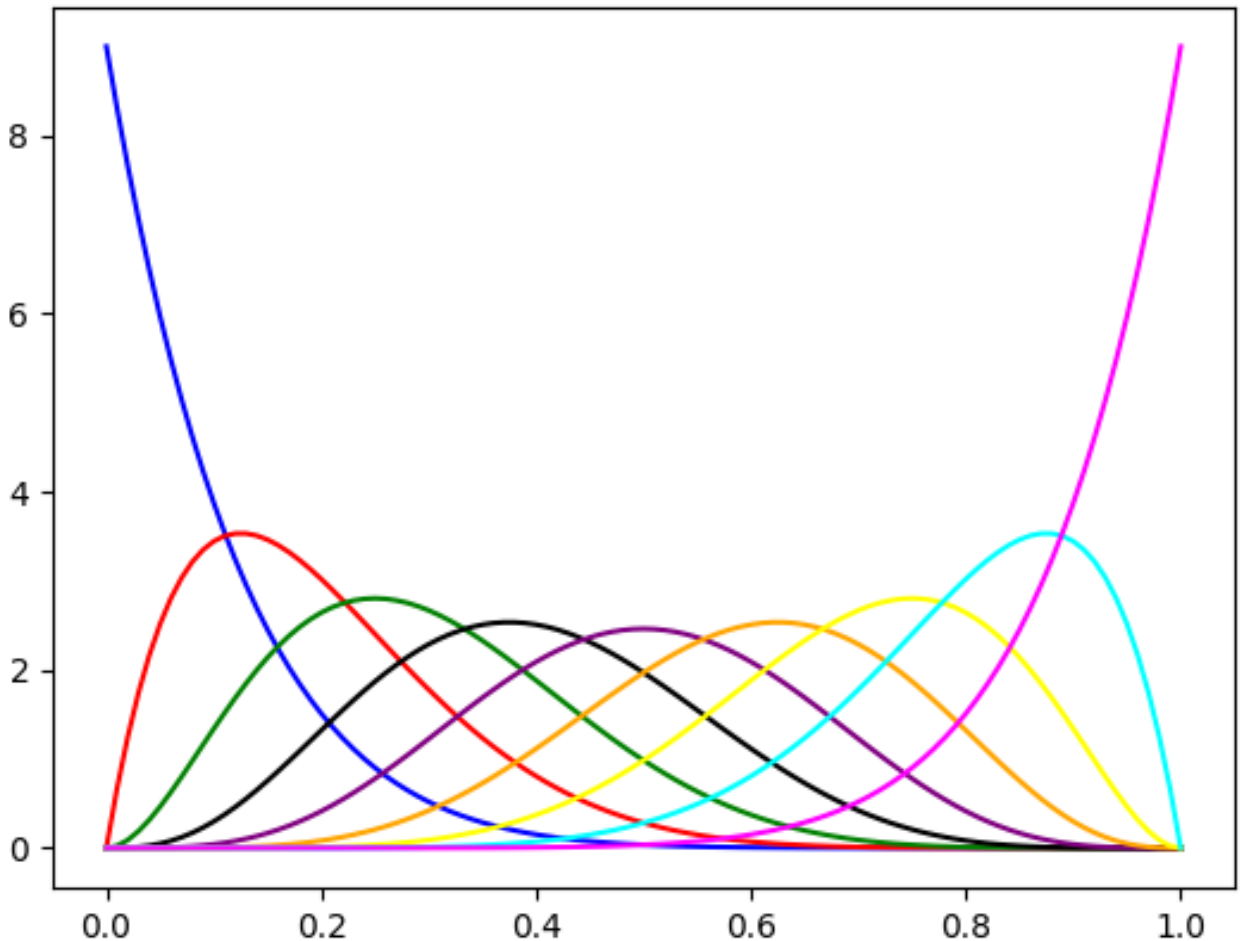
Rozkład beta dla różnych α i β



Rysunek: Rozkłady beta. Źródło:
`https://pl.wikipedia.org/wiki/Rozk%C5%82ad_beta`

.

Rozkład beta dla różnych α i β w Pythonie



Rozkład beta dla różnych α i β w Pythonie

```
from sympy.stats import Beta, density
import matplotlib.pyplot as plt

color = ["blue", "red", "green",
    "black", "purple", "orange",
    "yellow", "cyan", "magenta"]
for alpha in range(1,10):
    beta = 10 - alpha
    X = Beta("X", alpha, beta)
    x0 = [i/100 for i in range (0,101)]
    y0 = [density(X)(i).evalf() for i in x0]
    plt.plot(x0,y0, color= color[alpha-1])

plt.show()
```

Przykład

Załóżmy, że mamy sekwencję nukleotydów (cześć DNA, nukleotydy: A, C, G, T) i jesteśmy zainteresowanie konkretnym nukleotydem, powiedzmy A. Załóżmy, że prawdopodobieństwo wystąpienia A, $P(\mathrm{A}) = \theta$, jest nieznane, ale pozostaje stałe. Niech w obserwowanych danych o rozmiarze $n = 100$ mamy 43 nukleotydy A.

Jaka jest funkcja gęstości? Narysować wykres funkcje gęstości. Jaki jest prawdopodobieństwo ze $0.4 < \theta < 0.5$ oraz $0.1 < \theta < 0.2$?

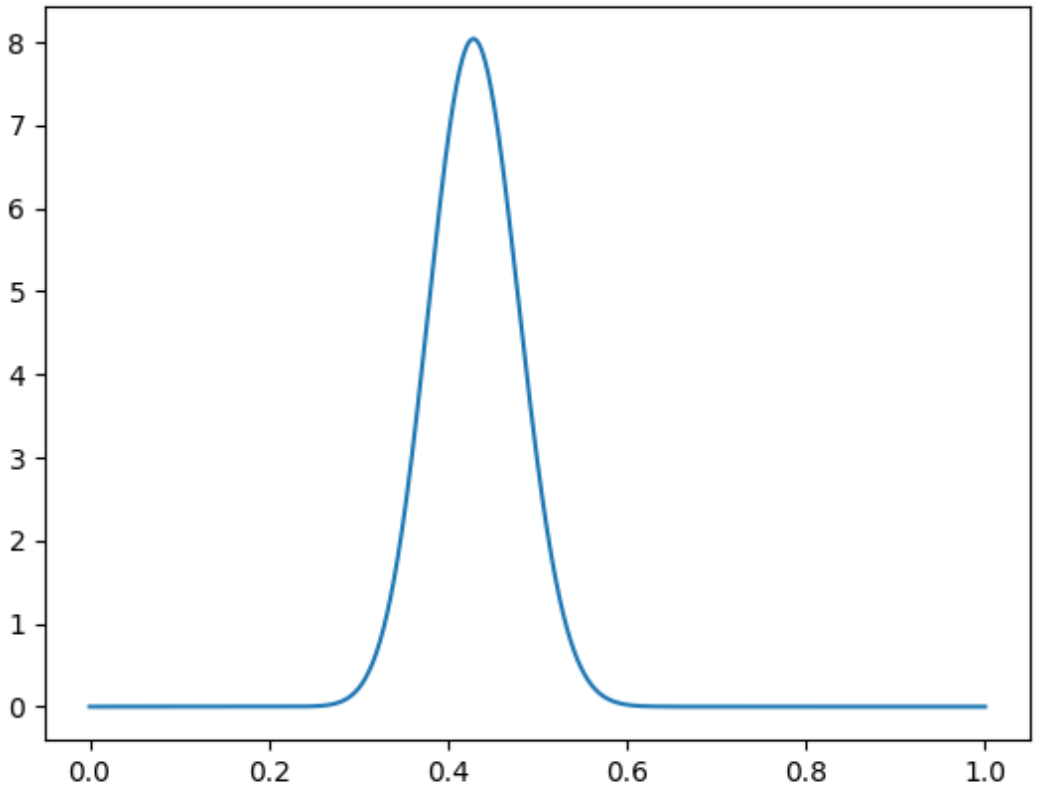
Przykład: kod

$\alpha = 43, \beta = 100 - 43$

```
from sympy.stats import Beta, density
import matplotlib.pyplot as plt
from sympy import *

alpha = 43
beta = 100-43
X = Beta("X", alpha, beta)
x = symbols('x')
print(density(X)(x))
x0 = [i/1000 for i in range (0,1001)]
y0 = [density(X)(i).evalf() for i in x0]
plt.plot(x0,y0)
plt.show()
```

Przykład: wykres



Funkcja gęstości:

$$f(43, 57, x) = \frac{x^{42}(1-x)^{56}}{\mathrm{B}(43, 57)}$$

Obliczenia $0.4 < \theta < 0.5$ oraz $0.1 < \theta < 0.2$

```
from sympy.stats import Beta, density
from sympy import *

alpha = 43
beta = 57
X = Beta("X", alpha, beta)

x = symbols('x')
print(integrate(density(X)(x),(x, 0.4,0.5)).evalf())
#86552614.7769390 Uwaga!!! Błąd obliczeniowy!
print(integrate(density(X)(x), (x, Rational(4,10),
        Rational(5,10))).evalf())
#0.645898492575897
print(integrate(density(X)(x),(x, 0.1,0.2)).evalf())
#1.04028876231591e-7
print(integrate(density(X)(x), (x, Rational(1,10),
        Rational(2,10))).evalf())#1.04028884394972e-7
print(integrate(density(X)(x), (x, Rational(35,100),
        Rational(55,100))).evalf())#0.941365862146943
#przedzial ufnosci
```

Rozdział 4. Statystyka opisowa

Statystyka opisowa

Statystyka opisowa – dział statystyki zajmujący się metodami opisu danych statystycznych uzyskanych podczas badania statystycznego. Celem stosowania metod statystyki opisowej jest podsumowanie zbioru danych i wyciągnięcie pewnych podstawowych wniosków i uogólnień na temat zbioru.

Statystykę opisową stosuje się zazwyczaj jako pierwszy i podstawowy krok w analizie zebranych danych.

Zbiór danych oraz tabela

Zbiór danych – kolekcja danych statystycznych zwykle ujętych w formie tablicy. Najczęściej kolumny odpowiadają obserwowanym cechom statystycznym, a każdy wiersz opisuje jedną obserwację z próby. Wartości komórek macierzy natomiast opisują realizacje danych zmiennych w kolejnych obserwacjach.

Imię	Wiek	Wzrost	Kolor oczu
Adam	26	167	Brązowe
Sylwia	34	164	Piwne
Tomasz	42	183	Niebieskie

W Pythonie zaczniemy obliczenia statystyczne od Biblioteki `Numpy` do obliczeń.

```
import numpy as np

imie = np.array(['Adam', 'Sylwia', 'Tomasz'])
wiek = np.array([26, 34, 42])
wzrost = np.array([167, 164, 183])
kolor_oczy = np.array(['Brazowe', 'Piwne', 'Niebeskie'])
```

Wyznaczanie miar rozkładu

Do opisu służą **miary rozkładu** – różnego rodzaju wielkości obliczane na podstawie uzyskanych danych. Interpretacja wartości tych miar dostarcza informacji na temat charakteru rozkładu cechy.

Miary można podzielić na kilka podstawowych kategorii:

- miary położenia, np. miary tendencji centralnej (np. średnia arytmetyczna, średnia geometryczna, średnia harmoniczna, średnia kwadratowa, mediana, moda), kwantyl
- miary zróżnicowania, np. odchylenie standardowe, wariancja, rozstęp, rozstęp ćwiartkowy, średnie odchylenie bezwzględne, odchylenie ćwiartkowe, współczynnik zmienności
- miary asymetrii, np. współczynnik skośności, współczynnik asymetrii, trzeci moment centralny
- miary koncentracji, np. współczynnik Giniego, kurtoza

Miary położenia klasyczne

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n \in \mathbb{R}$ są wartościami danej cechy ze zbioru danych.

- *Średnia arytmetyczna* jest zdefiniowana jako

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

- *Średnia ważona* jest zdefiniowana jako

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i w_i,$$

gdzie w_i są znane z góry i sumują się do 1 (inaczej podzielić przez $\sum w_i$)

- Jeżeli $X_i \geq 0$ dla każdego i, to *średnia geometryczna* jest zdefiniowana jako

$$G(X_1, \ldots, X_n) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} X_i}.$$

- Jeżeli $X_i > 0$ dla każdego i, to *średnia harmoniczna* jest zdefiniowana jako

$$H(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i}}.$$

Miary położenia klasyczne: numpy, scipy

```
import numpy as np
#Biblioteka scipy
from scipy.stats import gmean
from scipy.stats import hmean
from scipy.stats import pmean

dane = np.array([3,9,27])

print(sum(dane)/len(dane))#13.0
print(np.mean(dane))#13.0
w = np.array([0.2,0.4,0.4])
print(dane*w)#[ 0.6  3.6 10.8]
print(np.sum(dane*w))#15.0
print(pmean(dane, p=1, weights=w))#15.0
print(pow(dane.prod(), 1 / len(dane)))#8.999999999999998
print(gmean(dane))#9.000000000000002
print(pmean(dane, p=0))#9.000000000000002
print(len(dane) / sum(1 / dane))#6.230769230769231
print(hmean(dane))#6.230769230769231
```

pmean: https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.stats.pmean.html

Miary położenia pozycyjne: moda

Dominanta (*wartość modalna*, *moda*) – wartość najczęściej występująca w probie. Należy pamiętać, że dominantą może być więcej niż jedna wartość.

```
import numpy as np
dane1 = np.array([1, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 6, 7, 7, 7, 8])
dane2 = np.array([1, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 7, 7, 7, 8])
dane3 = np.array(["red", "blue", "black", "blue", "black", "black",
"brown"])
def my_mode(data):
    x = np.array([])
    res = np.array([])
    for i in np.unique(data):
        x = np.append(x, np.count_nonzero(data == i))
    m = max(x)
    for i in np.unique(data):
        if np.count_nonzero(data == i)==m:
            res = np.append(res, i)
    return res

print(my_mode(dane1))#[4.]
print(my_mode(dane2))#[4. 7.]
print(my_mode(dane3))#['black']
```

Miary położenia pozycyjne: moda

statistics oraz scipy

```
import numpy as np
from scipy.stats import mode
import statistics as st

dane1 = np.array([1, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 6, 7, 7, 7, 8])
dane2 = np.array([1, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 7, 7, 7, 8])
dane3 = np.array(["red", "blue", "black", "blue", "black", "black",
                  "brown"])


print(mode(dane1))#ModeResult(mode=np.int64(4), count=np.int64(5))
print(mode(dane2))#tylko jedna ModeResult(mode=np.int64(4),
                                          count=np.int64(3))
#print(mode(dane3))#blad

print(st.mode(dane1))#4
print(st.mode(dane2))#tylko jedna 4
print(st.mode(dane3))#black
```

Miary położenia pozycyjne: kwantyle

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są wartościami danej cechy ze zbioru danych, które da się uporządkować, i.e. możemy założyć, ze

$$X_1 \leq X_2 \leq \cdots \leq X_n$$

Kwantylem rzędu p, gdzie $0 \leq p \leq 1$, w rozkładzie empirycznym P_X próby X nazywamy każda wartość X_j, dla którego spełnione są nierówności

$$\#\{X \mid X \leq X_j\} \geq pn \text{ oraz } \#\{X \mid X \geq X_j\} \geq (1-p)n.$$

- Kwantyl rzędu $1/2$ to inaczej *mediana*.
- Kwantyle rzędu $1/4$, $2/4$, $3/4$ są inaczej nazywane *kwartylami (pierwszy, drugi, trzeci)* i oznaczany Q_1, Q_2, Q_3.
- Kwantyle rzędu $1/5$, $2/5$, $3/5$, $4/5$ to inaczej *kwintyle*.
- Kwantyle rzędu $1/10, 2/10, \ldots, 9/10$ to inaczej *decyle*.
- Kwantyle rzędu $1/100, 2/100, \ldots, 99/100$ to inaczej *percentyle*.

Rozstęp ćwiartkowy (*rozstęp międzykwartylowy*, *przedział międzykwartylowy*, *rozstęp kwartylny*, IQR (od ang. interquartile range)) – różnica między trzecim a pierwszym kwartylem.

Definicja mediany ściślej od zagadnień, przy jej obliczaniu z próbki o parzystej liczbie elementów często stosuje się średnią arytmetyczną dwóch środkowych elementów.

Miary położenia pozycyjne: kwantyle

```
import numpy as np

# create an array
dane = np.array([0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12])

# calculate the 0.25th, 0.50th and 0.75th quantile of the array
q25 = np.quantile(dane, 0.25)
q50 = np.quantile(dane, 0.50)
q75 = np.quantile(dane, 0.75)

print(q25, q50, q75)
#3.0 6.0 9.0

dane = np.array([0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7])

q25 = np.quantile(dane, 0.25)
q50 = np.quantile(dane, 0.50)
q75 = np.quantile(dane, 0.75)

print(q25, q50, q75)
#1.75 3.5 5.25
```

Tendencja centralna

Tendencja centralna – liczba (albo wartość), używana do opisania zbioru danych za pomocą jednej liczby (albo jednej albo wartości).

Miarami tendencje centralnej mogą występować np.: mediana, moda, rożne średnie.

Wzór Pearsona

Wzór Pearsona na relacje pomiędzy modą (Mo), medianą (Me) oraz średnią dla wartości liczbowych oraz dla rozkładów symetrycznych i umiarkowanie asymetrycznych:

$$\overline{X} - Mo = 3(\overline{X} - Me).$$

Miary zmienności klasyczne

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n \in \mathbb{R}$ są wartościami danej cechy z **populacji** danych. Wtedy dla (X_i) są zdefiniowane następne miary zmienności klasyczne:

- *Odchylenie przeciętne:*

$$d = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |X_i - \overline{X}|,$$

- *Wariancja:*

$$\sigma^2 = S^2(X) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2,$$

- *Odchylenie standardowe:*

$$\sigma = S(X) := \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}.$$

Miary zmienności klasyczne w Pythonie

```
import numpy as np
import math

# create an array
dane = np.array([0, 1, 5, 7, 9, 10, 14])
n = len(dane)
print(sum(abs(dane-np.mean(dane)))/n)#odchylenie precietne
print(sum((dane-np.mean(dane))**2)/n)#wariancja
print(np.var(dane))#wariancja
print(math.sqrt(sum((dane-np.mean(dane))**2)/n))#odchylenie
     #standartowe
print(np.std(dane))#odchylenie standartowe
```

```
3.918367346938776
21.387755102040813
21.387755102040813
4.624689730353898
4.624689730353898
```

Wartości z próby

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n \in \mathbb{R}$ są wartościami danej cechy z **próby** danych. Wtedy dla (X_i) są zdefiniowane następne miary zmienności klasyczne:

- *Wariancja:*

$$\sigma^2 = S^2(X) := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2,$$

- *Odchylenie standardowe:*

$$\sigma = S(X) := \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}.$$

Wartości z próby w Pythonie

```
import numpy as np
import statistics as stat
import math

# create an array
dane = np.array([0, 1, 5, 7, 9, 10, 14])
n = len(dane)

print(sum((dane-np.mean(dane))**2)/(n-1))#wariancja
print(stat.variance(dane))#wariancja: na int zwraca int
print(math.sqrt(sum((dane-np.mean(dane))**2)/(n-1)))#odchylenie
     #standartowe
print(stat.stdev(dane.tolist()))#odchylenie standartowe
#dziala na listach
```

```
24.95238095238095
24
4.99523582550223
4.995235825502231
```

Dlaczego dzielimy przez $n - 1$

Czy zauważyłeś różnicę?

Kiedy uśredniamy różnice podniesione do kwadratu w probie, dzielimy przez $n - 1$ zamiast przez pełną liczbę elementów n. Dlaczego? Ma to na celu ograniczenie ewentualnego ciążenia próby i uniknięcie sytuacji, w której nie docenilibyśmy wariancji populacji. Zmniejsza liczbę elementów w mianowniku o 1, zwiększamy wariancję, co pozwala uchwycić większą pewność próby.

Miary zmienności pozycyjne

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n \in \mathbb{R}$ są wartościami danej cechy ze zbioru danych.

- *Rozstęp* jest różnicą między największą i najmniejszą wartością cechy. Oblicza się go ze wzoru:

$$R = X_{\max} - X_{\min},$$

gdzie $X_{\max} = \max_i X_i$, $X_{\min} = \min_i X_i$.

- *Rozstęp ćwiartkowy* (*rozstęp międzykwartylowy*, *przedział międzykwartylowy*, *rozstęp kwartylny*, IQR – od ang. interquartile range) jest różnicą między trzecim a pierwszym kwartylem

$$R_Q = Q_3 - Q_1.$$

- *Odchylenie ćwiartkowe* (*odchylenie kwartylne*) określone jest wzorem:

$$Q = \frac{R}{2} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}.$$

- *Typowy obszar zmienności klasyczny* jest zdefiniowany jako $X_{typ} := [Me - Q, Me + Q]$.

Lemma

Pomiędzy odchyleniami: ćwiartkowym, przeciętnym i standardowym, obliczonymi z tego samego szeregu, zachodzi następująca relacja:

$$Q < d < S.$$

Podział cech statystycznych z dopuszczalnymi operacjami.

Skala	Własności miary	Operacje matematyczne	Operacje zaawansowane	Przykłady
nominalne (ang. nominal)	Klasyfikacja, członkostwo	$=, \neq$	Grupowanie	kolor oczy, płeć
porządkowe (ang. ordinal)	Porównanie, poziom	$=, \neq, >, <$	Sortowanie	wzrost, wiek
przedziałowe/interwałowe (ang. interval)	Różnica, bliskość	$=, \neq, >, <, +, -$	Porównanie ze standardem	data, temp. w ^{o}C
proporcjonalne (ang. ratio)	Wielkość, ilość	$=, \neq, >, <, +, -, *, /$	Iloraz	czas, masa

Podział cech statystycznych z miarami statystycznymi.

Skala	Własności miary	Tendencja centralna	Zmienność
nominalne (ang. nominal)	Klasyfikacja, członkostwo	Moda	Zróżnicowanie jakościowe*
porządkowe (ang. ordinal)	Porównanie, poziom	Mediana	Rozstęp, rozstęp ćwiartkowy**
interwałowe (ang. interval)	Różnica, bliskość	Średnia arytmetyczna	Odchylenie przeciętne
proporcjonalne (ang. ratio)	Wielkość, ilość	Średnia geometryczna oraz średnia harmoniczna	Wariancja

*Indeks zmienności jakościowej (IQV) jest miarą rozproszenia statystycznego w rozkładach nominalnych. Istnieje wiele takich indeksów, ale są one stosunkowo słabo zbadane w literaturze statystycznej. Najprostszy jest współczynnik zmienności, podczas gdy bardziej złożone wskaźniki obejmują entropię informacyjną.

Zmienne nominalne mogą być zapisane w postaci tablicy:

Kategoria	Ilość występowań	Częstotliwość

...

Wiele z IQV zostało podsumowanych i opracowanych przez Wilcoxa, który wymaga spełnienia następujących właściwości normalizacyjnych:

- Odchylenie waha się od 0 do 1.
- Zmienność wynosi 0 wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości próbek należą do jednej kategorii.
- Odchylenie wynosi 1 wtedy i tylko wtedy, gdy wartości próbek są równomiernie podzielone na wszystkie kategorie.

W szczególności wartość tych standaryzowanych wskaźników nie zależy od liczby kategorii ani liczby próbek.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n \in \mathbb{R}$ są wartościami danej cechy ze zbioru danych. *Indeks Wilcox'a* (*odchylenie przeciętne od mody*, DM) jest zdefiniowany jako

$$M = K\#\{X = Mo\} - n,$$

gzie K jest ilością kategorii (ilość różnych wartości X_i).
Współczynnik zmienności (*Indeks Freemana*):

$$\nu = 1 - \frac{\#\{X = Mo\}}{n},$$

tzn. $M = nK(1-\nu) - n$. *Wariancja od mody*:

$$\mathrm{ModVR} = \frac{K\nu}{K-1} = \frac{K(1 - \#\{X = Mo\}/n)}{K-1}.$$

Podział cech statystycznych z miarami statystycznymi.

Skala	Własności miary	Tendencja centralna	Zmienność
nominalne (ang. nominal)	Klasyfikacja, członkostwo	Moda	Zróżnicowanie jakościowe*
porządkowe (ang. ordinal)	Porównanie, poziom	Mediana	Rozstęp, rozstęp ćwiartkowy**
interwałowe (ang. interval)	Różnica, bliskość	Średnia arytmetyczna	Odchylenie przeciętne
proporcjonalne (ang. ratio)	Wielkość, ilość	Średnia geometryczna oraz średnia harmoniczna	Wariancja

**Każde dane porządkowe mogą być zapisany w postaci liczb z zachowaniem porządku. Rozstęp ćwiartkowy wskazuje na konsensus albo polaryzację wyników.

Example (Skala Likerta)

Niech była uzupełniona ankieta:

zdecydowanie nie zgadzam się	raczej się nie zgadzam	nie mam zdania	raczej się zgadzam	zdecydowanie się zgadzam
1	2	3	4	5

i wyniki (uporządkowane) są:

$$[1,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,3,3,3,3][3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3]$$

$$[3,3,3,3,3,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4][4,4,4,4,4,4,4,4,5,5,5,5,5,5,5],$$

tzn. $Q_1 = 3$, $Q_2 = 3$, $Q_3 = 4$, oraz $R_Q = Q_3 - Q_1 = 1$. To jest stosunkowo niewielki rozstęp ćwiartkowy, który wskazuje na konsensus. Z kolei większe rozstęp ćwiartkowy może sugerować, że opinie są spolaryzowane, tj. że respondenci mają tendencję do posiadania zdecydowanych opinii za lub przeciw temu tematowi.

Biblioteka Numpy

NumPy – otwarto-źródłowa biblioteka programistyczna dla języka Python dla obliczeń numerycznych, dodająca obsługę dużych, wielowymiarowych tabel i macierzy

Tablicy

Tablica (ang. array) w `NumPy` to struktura o jednym wymiarze lub większej liczbie wymiarów pozwalająca na działania ze zbiorami danych numerycznych, zaczynając od kilkuelementowych po ogromne zbiory przechowywane np. w chmurze. Pamiętajmy, że nie tylko wymiary charakteryzują tablicę – istnieje też kilka innych, równie ważnych cech.

- Tablice są stałej wielkości – nie możemy zmienić rozmiaru po jej utworzeniu.
- Przechowują elementy tego samego typu, np. liczby całkowite lub zmiennoprzecinkowe.
- Wykorzystywane „pod spodem" algorytmy pozwalają na bardzo szybkie operacje i efektywne wykorzystanie pamięci.

Niektórzy porównują tablice do list w Pythonie, ale listy różnią się od tablic, np. możliwością przechowywania elementów różnego typu (listy mogą być heterogeniczne), a także są jednowymiarowe (chociaż możliwe jest przechowywanie jednowymiarowej listy w drugiej liście).

Konwersja listy w tablicę

```
import numpy as np

# jednowymiarowa tablica na podstawie listy
arr_1d = np.array([1, 2, 3])
print(arr_1d)

# dwuwymiarowa tablica na podstawie listy
arr_2d = np.array([[1, 2, 3], [4, 5, 6]])
print(arr_2d)
```

```
[1 2 3]

[[1 2 3]
[4 5 6]]
```

Tworzenie tablic

```
import numpy as np

# jednowymiarowa tablica wypełniona zerami o długości 3
arr_zeros = np.zeros(5)
print(arr_zeros)#[0. 0. 0. 0. 0.]

# tablica z 10 równo rozłożonymi wartościami w zakresie od 0 do 2
a = np.linspace(0, 2, 10)
print(a)
#[0.         0.22222222 0.44444444 0.66666667 0.88888889 1.11111111
#  1.33333333 1.55555556 1.77777778 2.        ]

# dwuwymiarowa tablica wypełniona jedynkami o wymiarach 3x3
arr_2d_ones = np.ones((3, 3))
print(arr_2d_ones)
#[[1. 1. 1.]
# [1. 1. 1.]
# [1. 1. 1.]]
```

Tablica z wartości losowych.

```
import numpy as np

# jednowymiarowa tablica z losowymi
#wartościami z przedziału [0,1] o długości 3
arr = np.random.rand(3)
print(arr)
#[0.84218351 0.24822803 0.46510147]

# dwuwymiarowa tablica z losowymi
#wartościami z rozkładu normalnego o wymiarach 3x3
arr_2d = np.random.randn(3, 3)
print(arr_2d)
#[[-2.4500044  -0.37286908 -0.49917813]
# [-2.89081799  0.03262008 -0.73594147]
# [ 0.08182802 -0.64018268 -1.2193713 ]]
```

Tworzenie tablic: resize vs. reshape

```
import numpy as np

# tworzenie tablicy z 10 elementami
a = np.array([3, 7, 3, 3, 2, 9, 7, 1, 5, 4])
print(np.shape(a))#(10,)
b = a.reshape(2,5)
print(a) # [3 7 3 3 2 9 7 1 5 4]
print(b)
# [[3 7 3 3 2]
# [9 7 1 5 4]]
b = a.resize(2,5)
print(a)
#[[3 7 3 3 2]
# [9 7 1 5 4]]
print(b) # None
```

Podstawowe operacje

```
import numpy as np

# tworzenie jednowymiarych tablic a i b
a = np.array([1, 2, 3])
b = np.array([4, 5, 6])

# dodawanie tablicy b do tablicy a
c = a + b
print(c)#[5 7 9]

# dodawanie 5 do tablicy a
print(5+a)#[6 7 8]

# mnożenie tablicy a przez stałą 2
d = 2 * a
print(d)#[2 4 6]
```

Operacje logiczne

Wynikiem operacji logicznych takich jak AND (koniunkcja), OR (alternatywa) czy NOT (negacja) jest tablica zawierająca wartości logiczne True i False.

```
import numpy as np

# tworzenie jednowymiarych tablic a i b
a = np.array([1, 2, 3])
b = np.array([3, 2, 1])
# sprawdzamy, które elementy w tablicy a są mniejsze od
# odpowiadających im elementów w tablicy b
c = a < b
print(c)#[True False False]

# sprawdzamy które elementy w tablicy a są równe 2 lub 3
d = (a == 2) | (a == 3)
print(d)# [False  True  True]
```

Operacje redukcyjne

Wynikiem operacji redukcyjnych takich jak suma, minimum, maksimum czy średnia jest skalar.

```
import numpy as np

# tworzenie jednowymiarowej tablicy a
a = np.array([1, 2, 3])

# suma elementów tablicy a
b = np.sum(a)
print(b) #6

# średnia arytmetyczna dla elementów tablicy a
c = np.mean(a)
print(c) #2.0

# największy element w tablicy a
d = np.max(a)
print(d) #3
```

Operacje algebraiczne

```
import numpy as np

# tworzenie macierzy 3x3
a = np.array([[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9]])
# transpozycja macierzy a do macierzy b
b = np.transpose(a)
print(a)
#[[1 2 3]
# [4 5 6]
# [7 8 9]]

print(b)
# [[1 4 7]
# [2 5 8]
# [3 6 9]]
```

Operacje algebraiczne

Dobrym przykładem jest także mnożenie macierzy i obliczenie wyznacznika.

```
import numpy as np

# tworzenie macierzy a i b
a = np.array([[1, 2], [3, 4]])
b = np.array([[5, 6], [7, 8]])

# operacja mnożenia macierzy a i b
c = np.dot(a, b)
print(c)
#[[19 22]
# [43 50]]

# porownaj
print(a*b)
#[[ 5 12]
# [21 32]]

# obliczenie wyznacznika macierzy a
d = np.linalg.det(a)
print(d)#-2.0000000000000004
```

Operacje algebraiczne

A także rozwiązanie układu równań liniowych.

```
import numpy as np

# wyznaczenie rozwiązania układu równań liniowych Ax = b
A = np.array([[1, 2], [3, 4]])
b = np.array([5, 6])
x = np.linalg.solve(A, b)
print(x)#[-4.   4.5]
print(np.dot(np.linalg.inv(A),b)) #[-4.   4.5]
```

Inne funkcje

Sortowanie tablicy

```
import numpy as np

# tworzenie tablicy z 10 elementami
a = np.array([3, 7, 3, 3, 2, 9, 7, 1, 5, 4])

# sortowanie tablicy
b = np.sort(a)
print(b)
#[1 2 3 3 3 4 5 7 7 9]
```

Indeksacja i krojenie

Jak w listach:

```
import numpy as np

data = np.array([1, 2, 3])

print(data[1]) #2
print(data[0:2]) #[1 2]
print(data[1:]) #[2 3]
print(data[-2:]) #[2 3]


b = np.array([[1., 2., 3], [3., 4., 5]])
print(b[1,2]) #5.0
print(b[:,2])  #[3. 5.]
```

Indeksacja i krojenie

Logiczne:

```
import numpy as np

a = np.array([1,2,3])
print(a[[True, True, False]])
#[1 2]

b = np.array([[1 , 2, 3, 4], [5, 6, 7, 8], [9, 10, 11, 12]])
print(b[b<5])
#[1 2 3 4]

divisible_by_2 = b[b%2==0]
print(divisible_by_2)#[ 2  4  6  8 10 12]

c = b[(b > 2) & (b < 11)]
print(b) #[[ 1  2  3  4]
# [ 5  6  7  8]
# [ 9 10 11 12]]
```

https://numpy.org/doc/stable/user/absolute_beginners.html#indexing-and-slicing

Zamiana wartości 1

```
import numpy as np

a = np.array([[1 , 2, 3, 4], [5, 6, 7, 8], [9, 10, 11, 12]])
a[2,1] = 0
print(a)
#[[ 1  2  3  4]
#[ 5  6  7  8]
#[ 9  0 11 12]]
c = a
a[2,:] = 0
print(a)
#[[1 2 3 4]
# [5 6 7 8]
# [0 0 0 0]]
print(c)
#[[1 2 3 4]
# [5 6 7 8]
# [0 0 0 0]]
```

https://numpy.org/doc/stable/user/absolute_beginners.html#indexing-and-slicing

Zamiana wartości 2

```
import numpy as np

b = np.array([[1 , 2, 3, 4], [5, 6, 7, 8], [9, 10, 11, 12]])
d = b.copy()
b[b>5] = 0
print(b)
#[[1 2 3 4]
# [5 0 0 0]
# [0 0 0 0]]

print(d)
#[[ 1  2  3  4]
# [ 5  6  7  8]
# [ 9 10 11 12]]
```

https://numpy.org/doc/stable/user/absolute_beginners.html#indexing-and-slicing

Operacje matematyczne

https://numpy.org/doc/stable/reference/routines.math.html