Matematyczne aspekty analizy danych
semestr zimowy 2024/2025

Dr Anna Muranova
UWM w Olsztynie

Wykład 3

Pochodne

Pochodne są bardzo ważne w analizie danych. Często używa się ich w uczeniu maszynowym i innych algorytmach matematycznych, zawłaszcza w metodzie gradientu prostego. Kiedy nachylenie jest równe 0, to oznacza, ze osiągnęliśmy minimum lub maksimum zmiennej wyjściowej. Koncepcja ta jest przydatna w regresje liniowej, regresje logistycznej i sieciach neuronowych.
Pochodna funkcji – nieformalnie: miara szybkości funkcji, czyli tempa zmian jej wartości względem zmian jej argumentów.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Obliczenie pochodnej, korzystając z definicji 1

Oblicz pochodną funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie $x_0 = 2$, korzystając z definicji.

Rozwiązanie:
Liczymy wartość pochodnej w punkcie x_0, korzystając z definicji:

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (4 + h) = 4$$

Obliczenie pochodnej, korzystając z definicji 2

Możemy również policzyć z definicji wzór ogólny pochodnej dla tej funkcji ($f(x) = x^2$):

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x + h) = 2x$$

Czyli ostatecznie:

$$f'(x) = 2x$$

Można też napisać równoważnie:

$$(x^2)' = 2x$$

Korzystając z tak wyliczonego wzoru, możemy teraz obliczyć wartość pochodnej w dowolnym punkcie, np.:

$$f'(2) = 2 \cdot 2 = 4, f'(0) = 2 \cdot 0 = 0, f'(-5) = 2 \cdot (-5) = -10$$

Praktycznie zawsze opłaca się najpierw policzyć pochodną funkcji (zwłaszcza, że mamy do dyspozycji gotowe wzory na liczenie pochodnych), a dopiero potem wyznaczyć jej wartość w konkretnym punkcie.

Kalkulator pochodnych napisany w Pythonie

```
def pochodna_x(f, x, rozmiar_kroku):
    m = (f(x + rozmiar_kroku) - f(x)) / rozmiar_kroku
    return m


def moja_funkcja(x):
    return x**2


nachylenie_w_punkcie_2 = pochodna_x (moja_funkcja, 2, 0.00001)
print(nachylenie_w_punkcie_2)
```

Wynik: 4.000010000027032

Tabela pochodnych ważniejszych funkcji elementarnych

Nazwa funkcji	**Wzór funkcji i wzór jej pochodnej**
funkcja stała	$(c)' = 0$
funkcja potęgowa, $\alpha \neq 0$	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
pierwiastek kwadratowy, tzn. $\alpha = \frac{1}{2}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
funkcja wykładnicza, $a > 0, a \neq 1$	$(a^x)' = a^x \ln a$
funkcja wykładnicza o podstawie e	$(e^x)' = e^x$
funkcja logarytmiczna, $a > 0, a \neq 1$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
logarytm naturalny, tzn. $a = e$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
sinus	$(\sin x)' = \cos x$
cosinus	$(\cos x)' = -\sin x$
tangens	$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
cotangens	$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$
arkus sinus	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
arkus cosinus	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
arkus tangens	$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
arkus cotangens	$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
sinus hiperboliczny	$(\sinh x)' = \cosh x$
cosinus hiperboliczny	$(\cosh x)' = \sinh x$

Ważniejsze reguły obliczenia pochodnych

$$\big(f(x)+g(x)\big)' = f'(x)+g'(x)$$

$$\big(f(x)-g(x)\big)' = f'(x)-g'(x)$$

$$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))g'(x)$$

Przykład obliczenia pochodnych

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}\right)' = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{\frac{-2}{3}}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)' \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{\frac{-2}{3}}\left(\left(1+x^2\right)^{-1}\right)' = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{\frac{-2}{3}}\left(-\left(1+x^2\right)^{-2}\right)\left(1+x^2\right)' \\
&= \frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{2}{3}}\left(-\left(1+x^2\right)^{-2}2x\right) = -\frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{-4}{3}}2x \\
&= -\frac{2x}{\sqrt[3]{(1+x^2)^4}}
\end{aligned}$$

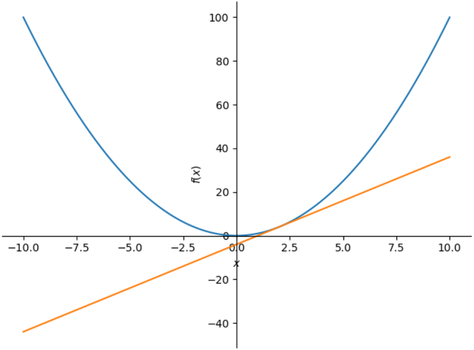
Przykład obliczenia pochodnych w sympy

```
from sympy import *

x = symbols('x')

f1 = x**2
print(diff(f1))
print(diff(f1).subs(x,3))

f2 = pow(1/(1+x**2), Rational(1,3))
print(diff(f2))
f2 = pow(1/(1+x**2), 1/3)
print(diff(f2))
```

```
2*x
6
-2*x*(1/(x**2 + 1))**(1/3)/(3*(x**2 + 1))
-0.666666666666667*x*(1/(x**2 + 1))**0.333333333333333/(x**2 + 1)
```

Prosta styczna

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad x \in \mathbb{R}$$



Prosta styczna, kod

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad x \in \mathbb{R}$$

```
from sympy import *

x = symbols('x')

f = x**2
der1 = diff(f)
x0 = 2

line = f.subs(x,x0) + der1.subs(x,x0)*(x-x0)
p1 = plot(f, show=False)
p2 = plot(line, show=False)

p1.extend(p2)
p1.show()
```

Pochodne cząstkowe

(Funkcje wiele zmiennych)

Przykład:

$$f(x) = 2x^3 + 3y^2 + xz$$

- $\frac{d}{dx}$ – y, z jako stałe: $\frac{df}{dx} = 6x^2 + z$
- $\frac{d}{dy}$ – x, z jako stałe: $\frac{df}{dx} = 6y$
- $\frac{d}{dz}$ – x, y jako stałe: : $\frac{df}{dz} = x$

- $\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(6x^2 + z\right) = 12x$
- $\frac{d^2}{dxdy} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dy}\right) = \frac{d}{dx}\left(6y\right) = 0$
- $\frac{d^2}{dydx} = \frac{d}{dy}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d}{dy}\left(6x^2 + x\right) = 0$

Pochodne cząstkowe w sympy

(Funkcje wiele zmiennych)

Przykład:

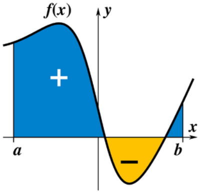
$$f(x) = 2x^3 + 3y^2 + xz$$

```
from sympy import *

x, y, z = symbols('x,y,z')

f = 2*x**3+3*y**2+x*z
#print(diff(f))#blad
print(diff(f, x))#6*x**2 + z
print(diff(f, y))#6*y
print(diff(f, z))#x
print(diff(diff(f,x), x))#12*z
print(diff(diff(f,x), y))#0
print(diff(diff(f,y), x))#0
```

Całki (oznaczone)

Intuicyjnie całka oznaczona to pole powierzchni między wykresem funkcji $f(x)$ w pewnym przedziale $[a, b]$ a osią odciętych, wzięte ze znakiem plus dla dodatnich wartości funkcji i minus dla ujemnych. Pojęcie całki oznaczonej, choć intuicyjnie proste, może być sformalizowane na wiele sposobów. Jeśli jakaś funkcja jest całkowalna według dwóch różnych definicji całki oznaczonej, wynik całkowania będzie taki sam.

$$\int_a^b f(x)dx.$$



Całkowanie w sympy

```
from sympy import *

x = symbols('x')
f = x**2 + 1

F = integrate(f)#x**3/3 + x

print(F)
print(F.subs(x,1) - F.subs(x,0))#4/3

pole= integrate(f,(x,0,1))#4/3

print(pole)
```

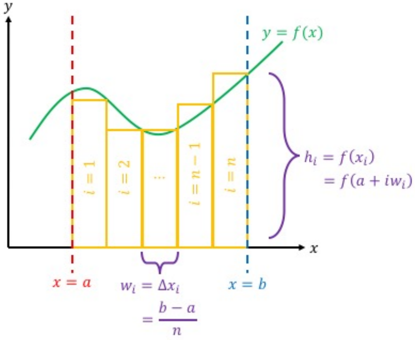
Obliczenie

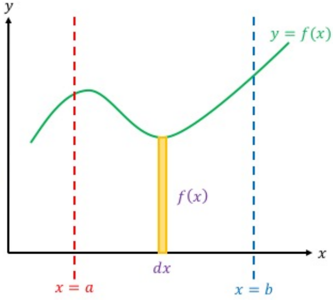
$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \text{ gdzie } F'(x) = f(x)$$

Przykład:

$$\int_0^1 (x^2+1)dx = (\frac{1}{3}x^3 + x)\Big|_0^1 = (\frac{1}{3}1^3 + 1) - (\frac{1}{3}0^3 + 0) = \frac{4}{3} \approx 1.3333333$$

Całki – przybliżone obliczenia





Całki – przybliżone obliczenia w Python

```
def przybliz_calke(a, b, n, f):
    delta_x = (b-a)/n
    suma = 0

    for i in range(1, n + 1):
        pkt_srodkowy = 0.5*(2*a + delta_x*(2*i-1))
        suma += f(pkt_srodkowy)

    return suma*delta_x


def moja_funkcja(x):
    return x**2+1

pole = przybliz_calke(0, 1, n=1000, f=moja_funkcja)
print(pole)#1.333333250000001
```

Rozdział 3. Prawdopodobieństwo

Prawdopodobieństwo

- w znaczeniu potocznym szansa na wystąpienie jakiegoś zdarzenia.

  W rozumieniu potocznym wyraz „prawdopodobieństwo” odnosi się do oczekiwania względem rezultatu zdarzenia, którego wynik nie jest znany (niezależnie od tego, czy jest ono w jakimś sensie zdeterminowane, miało miejsce w przeszłości, czy dopiero się wydarzy); w ogólności należy je rozumieć jako pewną miarę przewidywalności bądź pewności względem zjawiska (przy danej o nim wiedzy), co umożliwia ocenę potencjalnie związanego z nim ryzyka.
- natomiast w matematycznej teorii prawdopodobieństwa rodzina miar służących do opisu częstości lub pewności tego zdarzenia.

  Prawdopodobieństwo w sensie matematycznym służy do modelowania doświadczeń losowych poprzez przypisanie poszczególnym zdarzeniom losowym liczb, zwykle z przedziału jednostkowego (często wyrażanych procentowo: od 0 do 100%), wskazujących szanse ich zajścia.

Prawdopodobieństwo a statystyka

- *Prawdopodobieństwo* – to czysto teoretyczne, niewymagające żadnych danych rozważanie, jaka jest szansa na wystąpienia pewnego zdarzenia.
- *Statystyka* natomiast nie może istnieć bez danych, które wykorzystuje do odkrywania prawdopodobieństw, oraz dostarcza narzędzi do opisu danych.

Prawdopodobieństwo a statystyka: rzut kości

Mamy sześcian. Chcemy dowiedzieć się prawdopodobieństwo czwórki.

- *Prawdopodobieństwo* – zakładamy, jaki jest sześcian (nprz. uczciwy).

$$P(4) = 1/6.$$

- *Statystyka*: rzucamy sześcian dużo razy. Zakładamy, ze

$$P(4) = \frac{\text{Ilość czwórek}}{\text{Ilość rzutów}}.$$

Prawdopodobieństwo a statystyka: rzut kości

Mamy sześcian. Chcemy dowiedzieć się:

$$P(\{\text{liczba parzysta}\}) = ?$$

- *Prawdopodobieństwo* – zakładamy, jaki jest sześcian (model matematyczny):

$$P(\{\text{liczba parzysta}\}) = P(2) + P(4) + P(6)$$

- *Statystyka*: rzucamy sześcian duży razy. Zakładamy, ze

$$P(1) = \frac{\text{Ilość jedynek}}{\text{Ilość rzutów}}$$

i td. Wtedy używany naszego modelu:

$$P(\{\text{liczba parzysta}\}) = P(2) + P(4) + P(6)$$

Prawdopodobieństwo

Oto kilka pytań na które można odpowiedzieć poprzez podania prawdopodobieństwa:

- Jaka jest szansa, że w 10 uczciwych rzutach wypadnie 7 orłów?
- Jakie mam szansa na wygranie wyborów?
- Czy mój lot będzie opóźniony?
- Na ile mam pewność, że pewien produkt jest wadliwy?

Matematyczne interpretacje

Istnieje wiele matematycznych interpretacji pojęcia prawdopodobieństwa, między innymi tzw. :

- obiektywne (częstościowe), jako obiektywną częstość zdarzenia w dużej liczbie prób losowych,
- subiektywne (bayesowskie, od nazwiska T. Bayesa), jako reprezentację subiektywnej pewności, uzyskanej na podstawie dotychczasowej wiedzy i zaobserwowanych danych.

Prawdopodobieństwo matematyczne: przykład

- Jaki jest prawdopodobieństwo, że w jednym rzucie uczciwym wypadnie reszka:

$$X = \{\text{wypadnie reszka}\}$$

$$P(X) = P(\{\text{wypadnie reszka}\}) = 1/2 = 0.5(50\%)$$

$$P(\{\text{nie wypadnie reszka}\}) = 1/2 = 0.5(50\%)$$

$$P(\{\text{wypadnie reszka}\}) + P(\{\text{nie wypadnie reszka}\}) = 1$$

Prawdopodobieństwo matematyczne: przykład

- Jaki jest prawdopodobieństwo, że w trzech rzutach uczciwych wypadnie dokładnie dwie reszki:

OOO
OOR
ORO
ORR
ROO
ROR
RRO
RRR

$$P(\{\text{wypadnie dokładnie dwie reszki}\}) = 3/8$$

Uwaga!

$$P(\{\text{wypadnie co najmniej dwie reszki}\}) = 4/8$$

Szansa: przykład

- *Szansa* ze w rzucie uczciwym wypadnie reszka jest taka sam, jak ta, że ona nie wypadnie:

$$O(X) = O(\{\text{wypadnie reszka}\}) = 1.$$

- *Szansa* ze w trzech rzutach uczciwych wypadnie dokładnie dwie reszki jest

$$O(\{\text{wypadnie dokładnie 2 reszki}\}) = \frac{P(\{\text{wypadnie dokładnie 2 reszki}\})}{P(\{\text{wypadnie inna ilość reszek niż 2}\})}$$

$$= \frac{P(\{\text{wypadnie dokładnie 2 reszki}\})}{1 - P(\{\text{wypadnie dokładnie 2 reszki}\})} = \frac{3/8}{1-3/8} = \frac{3}{8-3} = 3/5$$

Szansa

$$O(X) = \frac{P(X)}{1 - P(X)}$$

$$P(X) = \frac{O(X)}{1 + O(X)}$$

Szansa jest użyteczna w statystyce Bayes'a, a także w regresjach logarytmicznych z logarytmem szansy.

Prawdopodobieństwo łącznie 1

Dla zdarzeń A i B prawdopodobieństwo $P(A \textit{ oraz } B) = P(A \cap B)$ nazywa się *prawdopodobieństwom łącznym*.

Jeżeli zdarzenia A i B są niezależne, to

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Przykład: rzucamy uczciwy sześcian i uczciwą monetą:

$$P(\{\text{czwórka } \textit{oraz} \text{ reszka}\}) = \frac{1}{6} \cdot 12 = \frac{1}{12}$$

Prawdopodobieństwo łącznie 2

Dla zdarzeń A i B prawdopodobieństwo $P(A \cap B)$ nazywa się *prawdopodobieństwom łącznym*.

Jeżeli zdarzenia A i B są niezależne, to

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Przykład (zdarzenia zależne): rzucamy uczciwy sześcian:

$$A = \{\text{liczba parzysta}\}, B = \{2\}$$

$$P(A) = 1/3, P(B) = 1/6$$

$$P(A \cap B) = 1/6.$$

Prawdopodobieństwo łącznie 3

Matematycznie zdarzenia A i B **nazywają się** niezależnymi, jeśli

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Przykład: rzucamy uczciwy sześcian:

$$A = \{\text{liczba parzysta}\}, B = \{\text{liczba, podzielna przez trzy}\}$$

$$P(A) = 1/3, P(B) = 1/2$$

$$P(A \cap B) = P(\{\text{liczba parzysta, podzielna przez 3}\}) = P(6) = 1/6.$$

Zdarzenia są niezależnymi!

Prawdopodobieństwo alternatywne 1

Dla zdarzeń A i B, zdarzenie A *lub* B nazywa się *sumą* zdarzeń, a $P(A \textit{ lub } B) = P(A \cup B)$ – *prawdopodobieństwom sumy zdarzeń* lub *prawdopodobieństwom alternatywnym*.

Jeżeli zdarzenia są wzajemne wykluczającymi ($P(A \cap B){=}0$), to

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Przykład: rzucamy uczciwy sześcian:

$$A = \{2\}, B = \{3\}$$

$$P(A) = 1/6, P(B) = 1/6$$

$$P(2 \cap 3) = 0.$$

$$P(2 \cup 3) = 1/6 + 1/6 = 1/3.$$

Zdarzenia są niezależnymi!

Prawdopodobieństwo alternatywne 2

Dla zdarzeń A i B, zdarzenie A *lub* B nazywa się *sumą* zdarzeń, a $P(A \cup B)$ – *prawdopodobieństwem sumy zdarzeń* lub *prawdopodobieństwom alternatywnym*.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Przykład: rzucamy uczciwy sześcian:

$$A = \{\text{liczba parzysta}\}, B = \{\text{liczba, podzielna przez trzy}\}$$

$$P(A) = 1/3, P(B) = 1/2$$

$$P(A \cap B) = P(\{\text{liczba parzysta, podzielna przez 3}\}) = P(6) = 1/6.$$

$$P(A \cup B) = P(\{2, 3, 4, 6\}) = 1/3 + 1/2 - 1/6 = 4/6 = 2/3.$$

Prawdopodobieństwo alternatywne 3

Przykład: rzucamy uczciwy sześcian i uczciwą monetą:

$$A = \{\text{liczba parzysta na sześcianie}\}, B = \{\text{reszka i dwójka}\}$$

$1O, 2O, 3O, 4O, 5O, 6O, 1R, 2R, 3R, 4R, 5R, 6R$

$$P(A) = 1/2, P(B) = 1/12$$

$$P(A \cap B) = 1/12.$$

$$P(A \cup B) = 1/2.$$

Czy są niezależne?
Czy są wzajemnie wykluczającymi?
A jeżeli

$$B = \{\text{reszka i trojka}\}?$$

$$B = \{\text{reszka}\}$$

Przykład

Prawdopodobieństwo że będzie padać wynosi 30%, a prawdopodobieństwo, że parasol będzie dostarczony na czas – 40%. Jeżeli to są niezależne zdarzenia, to

- Chcesz pospacerować w deszcz, ale z parasolem. Jaki jest prawdopodobieństwo, że będzie padać oraz parasol będzie dostarczone na czas?
- Musisz załatwić swoje sprawy. Jaki jest prawdopodobieństwo, że nie będzie padać lub parasol będzie dostarczone na czas?

Przykład 1

Prawdopodobieństwo że będzie padać wynosi 30%, a prawdopodobieństwo, że parasol będzie dostarczony na czas – 40%. Jeżeli to są niezależne zdarzenia, to

- Chcesz pospacerować w deszcz, ale z parasolem. Jaki jest prawdopodobieństwo, że będzie padać oraz parasol będzie dostarczony na czas?

$$A = \{\text{będzie padać }\}$$

$$B = \{\text{parasol będzie dostarczony na czas}\}$$

$$P(A) = 0.3, P(B) = 0.4$$

$$P(A \cap B) = [\textit{niezależność}] = P(A) \cdot P(B) = 0.3 \cdot 0.4 = 0.12$$

Przykład 2

Prawdopodobieństwo że będzie padać wynosi 30%, a prawdopodobieństwo, że parasol będzie dostarczony na czas – 40%. Jeżeli to są niezależne zdarzenia, to

- Musisz załatwić swoje sprawy. Jaki jest prawdopodobieństwo, że nie będzie padać lub parasol będzie dostarczony na czas?

$$A = \{\text{nie będzie padać }\}$$

$$B = \{\text{parasol będzie dostarczony na czas}\}$$

$$P(A) = 1 - P(\{\text{będzie padać }\}) = 1 - 0.3 = 0.7$$

$$P(B) = 0.4$$

Uwaga! Jeżeli A i B są niezależni, to A i nie B też są niezależni.

Dlatego:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.4 - 0.7 \cdot 0.4 = 0.82$$

Prawdopodobieństwo warunkowe 1

Prawdopodobienstwo, ze doszlo do zdarzenia A, jesli wystapilo zdarzenie B.

$$P(A \textit{ jeśli } B) = P(A \mid B)$$

Przykład: rzucamy uczciwy sześcian:

$$A = \{\text{dwójka}\}, B = \{\text{liczba parzysta}\}$$

$1, 2, 3, 4, 5, 6$

$$P(A \mid B) = ?.$$

$2, 4, 6$

$$P(A \mid B) = 1/3.$$

$$P(B \mid A) = ?.$$

2

$$P(A \mid B) = 1.$$

Prawdopodobieństwo warunkowe 2

Wzór:

$$P(A \mid B) = \frac{\text{Ilość wyników } A \text{ oraz } B}{\text{Ilość wyników } B} = \frac{\frac{\text{Ilość wyników } A \text{ oraz } B}{\text{Ilość wszystkich wyników}}}{\frac{\text{Ilość wyników } B}{\text{Ilość wszystkich wyników}}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

Takim czynem,

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A \mid B) \text{ oraz } P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

oraz

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)}.$$

Kierunek warunku ma znaczenie!

„85% chorych na raka pilo kawę"

Stany Zjednoczone:

$$P(Kawa) = 0.65$$

(statista.com, 65%)

$$P(Rak) = 0.005$$

(cancer.gov. 0.5%)

$$\text{„85\% chorych na raka pilo kawę": } P(Kawa \mid Rak) = 0.85$$

Co nas naprawdę interesuje jest

$$P(Rak \mid Kawa) = \frac{P(Kawa \mid Rak)P(Rak)}{P(Kawa)} = \frac{0.85 \cdot 0.005}{0.65} = 0,0065(0,65\%)$$

$$P(Rak \mid nie \;\; Kawa) = ?$$

Z czym możemy porównać?

$$P(Rak \mid nie \quad Kawa) = \frac{P(Rak \cap nie \quad Kawa)}{P(nie\ Kawa)} = \frac{P(Rak \cap nie \quad Kawa)}{1 - P(Kawa)}?$$

$$P(Rak \cap nie \quad Kawa) = 1 - P(nie \quad Rak) - P(Rak \quad i \quad Kawa)$$

Ponieważ, $P(Kawa\ i\ Rak) = P(Kawa \mid Rak)P(Rak) = 0.85 \cdot 0.005 = 0.00425$, mamy

$$P(Rak \cap nie \quad Kawa) = 1 - (1 - 0.005) - 0.00425 = 0.00075$$

$$P(Rak \mid nie \quad Kawa) = \frac{P(Rak \cap nie \quad Kawa)}{1 - P(Kawa)} = \frac{0.00075}{0.35} = 0.002$$

Wniosek:

$$P(Rak) = 0.005(0,5\%)$$

$$P(Rak \mid Kawa) = 0.0065(0,65\%)$$

$$P(Rak \mid nie \quad Kawa) = 0.002(0,2\%)$$

Co definiuje „pijącego kawę”?

Moglibyśmy tu uwzględnić inne zmienne, w szczególności to, co kwalifikuje osobę jako „pijącego kawę”. Jeśli ktoś pije kawę raz na miesiąc, a ktoś inny codziennie, czy powinniśmy określić obie te osoby jako „pijące kawę"? Co z osobą, która zaczęła pić kawę miesiąc temu, w porównaniu z osobą, która pije ją od 120 lat? Jak często i przez jaki długi czas musi pić kawę, aby przekroczyć próg bycia „pijącym kawę” w tych badaniach nad rakiem?

Są to ważne pytania, które pokazują, dlaczego dane rzadko opowiadają całą historię. Jeśli ktoś pokazuje Ci tabelę pacjentów z prostymi odpowiedziami „TAK/NIE” na pytanie, czy piją kawę, ten próg musi być zdefiniowany! Albo potrzebny jest bardziej miarodajny parametr, taki jak „liczba kaw wypitych w ciągu ostatnich trzech lat”. Nie komplikujemy tego teoretycznego obliczenia, i nie umawiamy, co kwalifikuje kogoś jako „pijącego kawę”, ale w rzeczywistych badaniach zawsze warto dobrze zastanowić się nad danymi.

Przykład

Prawdopodobieństwo że będzie padać wynosi 30%, a prawdopodobieństwo, że parasol będzie dostarczony na czas wynosi 40% jeżeli nie będzie padać oraz 20%, jeżeli będzie.

- Chcesz pospacerować w deszcz, ale z parasolem. Jaki jest prawdopodobieństwo, że będzie padać oraz parasol będzie dostarczony na czas?
- Musisz załatwić swoje sprawy. Jaki jest prawdopodobieństwo, że nie będzie padać lub parasol będzie dostarczony na czas?

Przykład 1

Prawdopodobieństwo że będzie padać wynosi 30%, a prawdopodobieństwo, że parasol będzie dostarczony na czas wynosi 40% jeżeli nie będzie padać oraz 20%, jeżeli będzie.

- Chcesz pospacerować w deszcz, ale z parasolem. Jaki jest prawdopodobieństwo, że będzie padać oraz parasol będzie dostarczony na czas?

$$A = \{\text{będzie padać }\}$$

$$B = \{\text{parasol będzie dostarczony na czas}\}$$

$$P(A) = 0.3, P(B) = 0.4, P(B \mid A) = 0.2$$

$$P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A) = 0.2 \cdot 0.3 = 0.06.$$

Przykład 2

Prawdopodobieństwo że będzie padać wynosi 30%, a prawdopodobieństwo, że parasol będzie dostarczony na czas wynosi 40% jeżeli nie będzie padać oraz 20%, jeżeli będzie.

- Musisz załatwić swoje sprawy. Jaki jest prawdopodobieństwo, że nie będzie padać lub parasol będzie dostarczony na czas?

$$P(\{\text{nie będzie padać lub parasol będzie dostarczony na czas}\})$$

$$= 1 - P(\{\text{będzie padać i parasol nie będzie dostarczony na czas}\})$$

$$A = \{\text{będzie padać }\}$$

$$B = \{\text{parasol nie będzie dostarczony na czas}\}$$

$$P(A) = 0.3, P(B \mid A) = 1 - 0.2 = 0.8$$

$$P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A) = 0.8 \cdot 0.3 = 0.24.$$

$$P(\{\text{nie będzie padać lub parasol będzie dostarczony na czas}\}) = 1 - 0.24 = 0.76$$

Przykład 2

Prawdopodobieństwo że będzie padać wynosi 30%, a prawdopodobieństwo, że parasol będzie dostarczony na czas wynosi 40% jeżeli nie będzie padać oraz 20%, jeżeli będzie.

- Musisz załatwić swoje sprawy. Jaki jest prawdopodobieństwo, że nie będzie padać lub parasol będzie dostarczony na czas?

  Inne rozwiązanie:

$$
\begin{gathered}
P(\{\text{nie będzie padać lub parasol będzie dostarczony na czas}\}) \\
= P(\{\text{nie będzie padać i parasol będzie dostarczony na czas}\}) \\
+ P(\{\text{nie będzie padać i parasol nie będzie dostarczony na czas}\}) \\
+ P(\{\text{będzie padać i parasol będzie dostarczony na czas}\}) \\
= P(\{\text{nie będzie padać}\}) \\
+ P(\{\text{będzie padać i parasol będzie dostarczony na czas}\}) \\
= (1 - 0.3) + 0.06 = 0.76
\end{gathered}
$$

  Ponieważ:

$$
\begin{gathered}
A = \{\text{będzie padać }\} \\
B = \{\text{parasol będzie dostarczony na czas}\} \\
P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A) = 0.2 \cdot 0.3 = 0.06
\end{gathered}
$$