Klasyczny rachunek zdań (KRZ)

Elementami klasycznego rachunku zdań są:

- zmienne zdaniowe: $p, q, r, \ldots$
- spójniki logiczne $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- nawiasy $(,)$

Zmienne zdaniowe mogą być prawdziwe lub fałszywe, mówimy wtedy że mają wartościowanie 1 lub 0 i piszemy $w(p) = 1, w(p) = 0$ (lub krótko $p = 1, p = 0$). Formułą KRZ oznaczamy dużymi literami A, B, C i definiujemy je rekurencyjnie:

- zmienne zdaniowe są formułami
- jeżeli A, B są formułami to formułą są wyrażenia
  - $(\neg A)$
  - $(A \vee B)$
  - $(A \wedge B)$
  - $(A \Rightarrow B)$
  - $(A \Leftrightarrow B)$

Aby nie pisać zbyt wielu nawiasów przyjmujemy zasady że najmocniej wiąże $\neg$ potem $\vee, \wedge$ a najsłabiej $\Rightarrow, \Leftrightarrow$ wówczas zapis

$$\neg p \vee q \Rightarrow r$$

jest skróconym zapisem formuły

$$((\neg(p) \vee q) \Rightarrow r)$$

Wartość logiczna formuły zależy od wartościowania zmiennych zdaniowych. Poniższe tabele przedstawiają wartości formuł $\neg p, p \vee q, p \wedge q, p \Rightarrow q, p \Leftrightarrow q$

Spójnik $\neg$ nazywamy negacją, $\neg p$ czytamy nie p (nieprawda że p.)

p	$\neg p$
0	1
1	0

Spójnik $\vee$ nazywamy alternatywą, $p \vee q$ czytamy p lub q.

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Spójnik $\wedge$ nazywamy alternatywą, $p \wedge q$ czytamy p i q.

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Spójnik $\Rightarrow$ nazywamy implikacją, $p \Rightarrow q$ czytamy z p wynika q. (p implikuje q)

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Spójnik $\Leftrightarrow$ nazywamy równoważnością, $p \Leftrightarrow q$ czytamy p wtedy i tylko wtedy gdy q (p jest równoważne q)

p	q	$p \Leftrightarrow \vee q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tautologią nazywamy formułę która jest prawdziwa dla dowolnego wartościowania. Podstawowe tautologie nazywamy prawami KRZ

Mówimy że dwie formuły A, B są **logicznie równoważne** (ozn $A \equiv B$) jeżeli przy dowolnym wartościowaniu przyjmują te same wartości (formuła $A \Leftrightarrow B$ jest tautologią)

Podstawieniem za zmienną p w formule A formuły B nazywamy zastąpienie każdego wystąpienia zmiennej p formułą B. (ozn $A[p/B]$.) Przykładowo dla formuł $A = (p \vee q) \Rightarrow r, B = p \wedge q$ mamy

$$A[r/B] = (p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$$

Twierdzenie 0.1 (o podstawianiu)**.** *Jeżeli formuła A jest tautologią to dla dowolnej formuły B formuła $A[p/B]$ jest tautologią.*

Prostą konsekwencją jest fakt że w każdym prawie KRZ możemy zastąpić zmienne zdaniowe dowolnymi formułami.

Twierdzenie 0.2 (o zastąpowaniu)**.** *Jeżeli w formule A zastąpimy pod formułę B formułą C do niej równoważną to otrzymana formuła będzie równoważna formule A.*

Teoria mnogości

Pojęciami pierwotnymi są zbiór i relacja należenia do zbioru ($\in$). Zbiory oznaczamy dużymi literami, a fakt należenia elementu x do zbioru X zapisujemy $x \in X$, jeżeli x nie jest elementem zbioru X to piszemy $x \notin X$ Zbiór to kolekcja określonych rozróżnialnych obiektów. Zbiory określamy przez wypisanie ich elementów lub przez określenie funkcji zdaniowej którą spełniają elementy danego zbioru. **Funkcją zdaniową** $\phi(x)$ o dziedzinie X nazywamy wyrażenie które jest zdaniem prawdziwym lub fałszywym przy ustalonym $x \in X$.

Przykładem funkcji zdaniowej o dziedzinie $\mathbb{N}$ jest $\phi(x) - x \leqslant 2$ jest to zdanie prawdziwe dla $x = 1$ a fałszywe dla $x = 3$ i zbiór liczb od 0 do 2 można zapisać jako

$$\{0, 1, 2\} = \{2, 1, 0\} = \{x \in \mathbb{N}; x \leqslant 2\}$$

Kolejność elementów w zbiorze nie ma znaczenia. jeżeli przestrzeń X jest znana z kontekstu czasem pomija się zapis $x \in X$ pisząc tylko x. W przypadku definiowania zbioru przy pomocy funkcji zdaniowej element a należy do zbioru wtedy i tylko wtedy gdy spełniona jest dana funkcja zdaniowa.

$$a \in \{x; \phi(x)\} \Leftrightarrow \phi(a)$$

Dwa zbiory są równe wtedy i tylko wtedy gdy zawierają te same elementy

$$A = B \Leftrightarrow x \in A \Leftrightarrow B$$

Zbiór B jest podzbiorem zbioru A jeżeli każdy element zbioru B jest elementem zbioru A.

$$B \subset A \Leftrightarrow x \in B \Rightarrow x \in A$$

Sumą zbiorów A, B nazywamy zbiór którego elementy należą do zbioru A lub B

$$A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}$$

Przecięciem (iloczynem, częścią wspólną) zbiorów A, B nazywamy zbiór którego elementy należą do zbioru A i B

$$A \cap B = \{x; x \in A \wedge x \in B\}$$

Różnicą zbiorów A, B nazywamy zbiór którego elementy należą do zbioru A i nie należą do zbioru B

$$A \setminus B = \{x; x \in A \wedge x \notin B\}$$

Szczególnym przypadkiem zbioru jest zbiór pusty $\emptyset$ nie zawierający żadnych elementów, można go określić dowolną sprzeczną (zawsze fałszywą) funkcją zdaniową

$$\emptyset = \{x \in X; x \notin X\}$$

Zbiory które nie mają wspólnych elementów ($A \cap B = \emptyset$) nazywamy zbiorami rozłącznymi.

Zbiór którego elementami są wszystkie podzbiory zbioru X nazywamy **zbiorem potęgowym** danego zbioru (ozn $P(x)$ lub 2^X)

$$P(x) = \{A; A \subset X\}$$

Zbiór pusty jest podzbiorem dowolnego zbioru jest więc elementem każdego zbioru potęgowego.

Funkcją charakterystyczną zbioru A będącego podzbiorem zbioru X nazywamy funkcję które każdemu elementowi zbioru X przyporządkowuje 1 lub 0 w zależności od tego czy należy on do zbioru A czy nie

$$f(x) = \begin{cases} 1 & dla \quad x \in A \\ 0 & dla \quad x \notin A \end{cases}$$

Często kolejność elementów ma znaczenie używamy wówczas pary uporządkowanej (a, b) zamiast zbioru $\{a, b\}$. para uporządkowana (a, b) jest rożna od pary (b, a) i dwie pary $(a, b), (c, d)$ są równe jeżeli $a = c$ i $b = d$. Pojęcie pary uporządkowanej posiadającej te własności można zdefiniować używając pojęcia zbioru następująco

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Iloczynem kartezjańskim zbiorów A, B nazywamy zbiór wszystkich par uporządkowanych których pierwszy element należy do A a drugi do B

$$A \times B = \{(a, b); a \in A \wedge b \in B\}$$

Stosujemy skrócony zapisy na iloczyn kartezjański takich samych zbiorów $A \times A = A^2$. Iloczyn kartezjański n zbiorów definiujemy analogicznie jako n-kę uporządkowaną i stosujemy zapis A^n na iloczyn kartezjański n zbiorów A

Liczby naturalne

Liczby naturalne można określić aksjomatycznie jako zbiór $\mathbb{N}$ z relacją następnika (pojęciem liczby następnej) spełniający własności.

- 0 jest liczbą naturalną
- 0 nie jest następnikiem żadnej liczby naturalnej
- Dla każdej liczby naturalnej n istnieje dokładnie jedna liczba naturalna m taka że m jest następnikiem n.
- Jeżeli m jest następnikiem liczb naturalnych n i k to $n = k$
- Dla każdego $A \subset \mathbb{N}$ jeżeli spełnione są warunki
  - 0 jest elementem zbioru A
  - Jeżeli n należy do zbioru A to następnik n należy do A

  to $A = \mathbb{N}$

Konstrukcja liczb naturalnych na gruncie teorii mnogości. Następnikiem zbioru X nazywamy zbiór $X \cup \{X\}$. Zerem jest zbiór pusty. Wówczas kolejnymi liczbami naturalnymi są

$$\begin{gathered} 0 = \emptyset \\ 1 = \{\emptyset\} \\ 2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ 3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\ \vdots \\ n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\} \\ \vdots \end{gathered}$$

Rachunek kwantyfikatorów

$\forall$- **kwantyfikator ogólny**. Wyrażenie $\forall_x \phi(x)$ czytamy. Dla każdego x zachodzi $\phi(x)$.

$\exists$- **kwantyfikator egzystencjalny**(szczegółowy). Wyrażenie $\exists_x \phi(x)$ czytamy. Istnieje x takie że zachodzi $\phi(x)$.

Jeżeli $\phi(x)$ jest funkcją zdaniową zmiennej x to wyrażenia $\exists_x \phi(x), \forall_x \phi(x)$ są zdaniami. Jeżeli $\phi(x) - x > 0$ jest funkcją zdaniową na liczbach rzeczywistych to wyrażania $\forall_{x \in \mathbb{R}} x > 0$ i $\exists_{x \in \mathbb{R}} x > 0$ są zdaniami odpowiednio fałszywym i prawdziwym. Wyrażenie do którego odnosi się kwantyfikator ujmujemy w nawias który stanowi zakres działania kwantyfikatora. Kwantyfikator wiąże odpowiednie zmienne tylko jeżeli znajdują się one w jego zasięgu. Zmienne które nie są związane są zmiennymi wolnymi. jeżeli wyrażenie nie zawiera zmiennych wolnych to jest zdaniem logicznym (prawdą lub fałszem) w wyrażeniu

$$\exists_x (\phi(x) \vee \psi(y)) \vee \psi(x)$$

Pierwszy x jest związany kwantyfikatorem a drugi nie, zmienna y jest wolna bo nie odnosi się do niej kwantyfikator. Wyrażenie to jest funkcją zdaniową 2 zmiennych x i y.

Uogólnione działania na zbiorach

Rodziną zbiorów indeksowaną zbiorem T nazywamy zbiory A_t których postać zależy od elementów $t \in T$ zbiory

$$A_t = \{n \in \mathbb{N}; n \leqslant t\}$$

oznaczają rodzinę podzbiorów zbioru liczb naturalnych nie większych niż t.

Sumą uogólnioną zbiorów A_t nazywamy zbiór którego elementy należą do któregoś ze zbiorów A_t

$$\bigcup_{t \in T} A_t = \{x; \exists_{t \in T} x \in A_t\}$$

Iloczynem uogólnionym zbiorów A_t nazywamy zbiór którego elementy należą do każdego ze zbiorów A_t

$$\bigcap_{t \in T} A_t = \{x; \forall_{t \in T} x \in A_t\}$$

Dla zbiorów powyżej mamy

$$\bigcup_{t \in \mathbb{N}} A_t = \mathbb{N}$$

$$\bigcap_{t \in \mathbb{N}} A_t = \emptyset$$

Relacje

Relacją 2-argumentową R nazywamy dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego zbiorów X, Y. X nazywamy dziedziną a Y przeciwdziedziną relacji. Jeżeli $X = Y$ to mówimy że relacja R jest określona na zbiorze X

Jeżeli para (x, y) należy do relacji R to piszemy $(x, y) \in R$ lub xRy. przykładem relacji jest relacja $\leqslant$ na zbiorze liczb rzeczywistych.

$$(2, 3) \in \leqslant \Leftrightarrow 2 \leqslant 3$$

Relacją R^{-1} odwrotną do R nazywamy zbiór par (y, x) takich że $(x, y) \in R$ Identycznością na zbiorze X nazywamy relację $id_X = \{(x, x); \in X\}$

$$R^{-1} = \{(y, x); (x, y) \in R\}$$

Relacją odwrotną do $\leqslant$ jest $\geqslant$. Złożeniem relacji S i T nazywamy relację

$$S \circ T = \{(x, z); \exists_y((x, y) \in T \wedge (y, z) \in S)\}$$

Rozróżniamy różne typy relacji ze względu na posiadane własności. Mówimy że relacja jest

- zwrotna jeżeli
$$\forall_x(xRx)$$
- symetryczna jeżeli
$$\forall_{x,y}(xRy \Rightarrow yRx)$$
- antysymetryczna jeżeli
$$\forall_{x,y}(xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y)$$
- przechodnia jeżeli
$$\forall_{x,y,z}(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$$

- spójna jeżeli

$$\forall_{x,y}(xRy \vee yRx)$$

Relacja równoważności

Relację zwrotną symetryczną i przechodnią $\approx$ określoną na zbiorze X nazywamy relacją równoważności. Relacja równoważności dzieli zbiór X na rozłączne niepuste podzbiory nazywane klasami abstrakcji. Klasą abstrakcji relacji $\approx$ o reprezentancie x jest zbiór wszystkich elementów będących w relacji z x

$$[x]_{\approx} = \{y; x \approx y\}$$

Przestrzenią ilorazową wyznaczoną przez $\approx$ nazywamy zbiór wszystkich klas abstrakcji relacji $\approx$

$$X_{/\approx} = \{[x]_{\approx}; x \in X\}$$

Relacją równoważności na zbiorze liczb całkowitych jest relacja posiadania tej samej reszty z dzielenia przez 3 Klasą abstrakcji dla 0 jest

$$[0]_{\approx} = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$$

Przestrzeń ilorazowa składa się z trzech elementów $[0]_0, [1]_{\approx}, [2]_{\approx}$.

Konstrukcja liczb całkowitych

Na zbiorze par liczb naturalnych $\mathbb{N}^2$ określamy relację równoważności $\approx$

$$(n_1, m_1) \approx (n_2, m_2) \Leftrightarrow n_1 + m_2 = n_2 + m_1$$

Liczby naturalne identyfikujemy z klasami abstrakcji $[(0, n)]_{\approx}$ a liczby całkowite ujemne z klasami abstrakcji $[(n, 0)]_{\approx}$ Zbiór liczb całkowitych identyfikujemy z przestrzenią ilorazową wyznaczoną przez tą relację

$$\mathbb{N}^2_{/\approx} = \mathbb{Z}$$

Konstrukcja liczb wymiernych

Na zbiorze $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ określamy relację równoważności $\approx$

$$(n_1, m_1) \approx (n_2, m_2) \Leftrightarrow n_1 m_2 = n_2 m_1$$

Liczby wymierne $\frac{n}{m}$ identyfikujemy z klasami abstrakcji $[(n, m)]_{\approx}$. Zbiór liczb wymiernych identyfikujemy z przestrzenią ilorazową wyznaczoną przez tą relację.

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}_{/\approx} = \mathbb{Q}$$

Konstrukcja liczb rzeczywistych

Na zbiorze X ciągów Cauchy'ego (ciągów których coraz dalsze wyrazy są coraz bliżej siebie) liczb wymiernych określamy relację równoważności $\approx$

$$(a_n)_{\mathbb{N}} \approx (b_n)_{\mathbb{N}} \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} (a_n - b_n)$$

Liczby rzeczywiste identyfikujemy klasami abstrakcji tej relacji. Zbiór liczb rzeczywistych identyfikujemy z przestrzenią ilorazową wyznaczoną przez tą relację.

$$X_{/\approx} = \mathbb{R}$$

Funkcje

Relację $f \subset X \times Y$ spełniającą warunki

- $$\forall_{x\in X}\exists_{y\in Y}(x,y) \in f$$

- $$\forall_{x\in X}\forall_{y_1,y_2\in Y}((x,y_1) \in f \wedge (x,y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2)$$

nazywamy funkcją działającą ze zbioru X w zbiór Y, co zapisujemy $f : X \to Y$. X nazywamy **dziedziną** funkcji f a elementy Zbioru X **argumentami**. Y nazywamy przeciwdziedziną funkcji f a elementy zbioru Y takie że $(x,y) \in f$ nazywamy wartościami. (nie wszystkie elementy Y muszą być wartościami) Gdy relacja f jest funkcją to zamiast pisać $(x,y) \in f$ piszemy $f(x) = y$ wówczas powyższe warunki wyglądają następująco

- $$\forall_{x\in X}\exists_{y\in Y} f(x) = y$$

- $$\forall_{x\in X}\forall_{y_1,y_2\in Y}(f(x) = y_1 \wedge f(x) = y_2 \Rightarrow y_1 = y_2)$$

Pierwszy oznacza że funkcja jest określona dla każdego argumentu, a drugi że dla danego argumentu przyjmuje tylko jedną wartość

Injekcją (funkcją różnowartościową) nazywamy funkcję spełniającą warunek

$$\forall_{x_1,x_2\in X}(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

lub równoważny

$$\forall_{x_1,x_2\in X}(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$$

czyli przyjmującą dla różnych argumentów różne wartości

Surjekcją (funkcją na) nazywamy funkcję spełniającą warunek

$$\forall_{y\in Y}\exists_{x\in X}(f(x) = y)$$

czyli taką dla której każdy element przeciwdziedziny jest wartością funkcji.

Funkcję która jest jednocześnie różnowartościowa i na nazywamy **bijekcją**

Relacja f^-1 jest funkcją wtedy i tylko wtedy gdy funkcja f jest bijekcją. Złożeniem funkcji $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ nazywamy funkcję $g \circ f : X \to Z$ taką że.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Jeżeli $f : X \to Y$ jest bijekcją to $f^{-1} : X \to Y$ też jest bijekcją oraz $f^{-1} \circ f = id_X$, $f \circ f^{-1} = id_Y$

Złożenie surjekcji/injekcji/bijekcji jest surjekcją/injekcją/bijekcją. Jeżeli złożenie funkcji $g \circ f$ jest injekcją to f jest injekcją. Jeżeli złożenie funkcji $f \circ g$ jest surjekcją to g jest surjekcją.

Obraz i przeciwobraz

Obrazem zbioru $A \subset X$ w odwzorowaniu $f : X \to Y$ nazywamy zbiór wszystkich wartości funkcji f na elementach zbioru A

$$f(A) = \{f(x); x \in A\}$$

Przeciwobrazem zbioru $B \subset Y$ w odwzorowaniu $f : X \to Y$ nazywamy zbiór wszystkich argumentów funkcji f których wartości należą do zbioru B

$$f^{-1}(B) = \{x; f(x) \in B\}$$

Własności obrazu i przeciwobrazu w działaniach na zbiorach

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$
$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$
$$f(A \setminus B) \supset f(A) \setminus f(B)$$
$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$
$$f^{-1}(A \cap B) = f(A)^{-1} \cap f(B)^{-1}$$
$$f^{-1}(A \setminus B) = f(A)^{-1} \setminus f(B)^{-1}.$$

Równoliczność zbiorów

Dwa zbiory A, B są równoliczne $A \quad B$ jeżeli istnieje bijekcja $f : A \to B$. Relacja   jest relacją równoważności. Klasy abstrakcji relacji   nazywamy **liczbami kardynalnymi** Jeżeli zbiory A, B mają taka samą liczbę elementów to mówimy że są tej samej mocy ($|A| = |B|$). Dla zbiorów skończonych liczbami kardynalnymi są liczby naturalne, moc zbioru liczb naturalnych nazywamy $\aleph_0$ aleph zero. Zbiór nazywamy **przeliczalnym** jeżeli jest skończony lub równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych. Zbiorami przeliczalnymi są zbiór liczb całkowitych i wymiernych, oraz dowolny zbiór którego elementy można wypisać w postaci ciągu nieskończonego. konsekwencją jest to że suma przeliczalnej ilości zbiorów przeliczalnych jest przeliczalna oraz iloczyn skończonej ilość zbiorów przeliczalnych jest przeliczalny. Iloczyn nieskończonej ilości zbiorów przeliczalnych nie musi być przeliczalny. Zbiór liczb rzeczywistych jest liczniejszy niż zbiór liczb naturalnych. Moc zbioru liczb rzeczywistych nazywamy continuum. Zbiór liczb niewymiernych, dowolny przedział liczb rzeczywistych oraz dowolny zbiór zawierający przedział są mocy continuum.
Tw Cantora moc zbioru potęgowego zbioru X jest większa od mocy zbioru X

$$|X| < |2^X|$$

Hipoteza continuum: dowolny podzbiór zbioru liczb rzeczywistych jest przeliczalny lub równoliczny ze zbiorem liczb rzeczywistych.

Relacje porządkujące

Relację $\preceq$ nazywamy częściowym porządkiem jeżeli jest zwrotna antysymetryczna i przechodnia. Zbiór X z relacją $\preceq$ nazywamy częściowym porządkiem lub zbiorem częściowo uporządkowanym $(X, \preceq)$ przykładami częściowych porządków są $(\mathbb{N}, \leqslant), (\mathbb{N}, |), (P(X), \subset)$

Element x nazywamy **elementem maksymalnym** częściowego porządku $(X, \preceq)$ jeżeli nie jest mniejszy od żadnego elementu zbioru X

$$\neg\exists_{y \in X}(x \preceq y \wedge x \neq y)$$

Element x nazywamy **elementem minimalnym** częściowego porządku $(X, \preceq)$ jeżeli nie jest większy od żadnego elementu zbioru X

$$\neg\exists_{y \in X}(y \preceq x \wedge x \neq y)$$

Element x nazywamy **elementem największym** częściowego porządku $(X, \preceq)$ jeżeli jest on większy-równy od każdego elementu zbioru X

$$\forall_{y \in X}(y \preceq x)$$

Element x nazywamy **elementem najmniejszym** częściowego porządku $(X, \preceq)$ jeżeli jest on mniejszy-równy od każdego elementu zbioru X

$$\forall_{y \in X}(x \preceq y)$$

Element x nazywamy **ograniczeniem górnym** zbioru $A \subset$ częściowego porządku $(X, \preceq)$ jeżeli jest on większy-równy od każdego elementu zbioru A

$$\forall_{y \in A}(y \preceq x)$$

Element x nazywamy **ograniczeniem dolnym** zbioru $A \subset$ częściowego porządku $(X, \preceq)$ jeżeli jest on mniejszy-równy od każdego elementu zbioru A

$$\forall_{y \in A}(x \preceq y)$$