9. Równania liniowe drugiego rzędu

Definicja 1 *Równaniem liniowym drugiego rzędu nazywamy równanie postaci*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = r(t), \tag{1}$$

gdzie p, q, r są funkcjami zmiennej t określonymi na pewnym odcinku (a, b). Równanie (1) uzupełnione warunkiem początkowym

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1 \tag{2}$$

tworzy zagadnienie początkowe.

Twierdzenie 1 *Jeżeli $p(t)$ i $q(t)$ są ciągłe, to rozwiązanie równania (1) z warunkiem początkowym (2) istnieje, jest jednoznaczne i określone dla wszystkich $t \in (a, b)$.*

Wniosek 1 *Jeśli dla pewnego $t_0 \in (a, b)$ zachodzi $y(t_0) = 0$ oraz $y'(t_0) = 0$, to wówczas $y(t) = 0$ dla wszystkich $t \in (a, b)$.*

Jeśli $r(t) \equiv 0$, to równanie liniowe drugiego rzędu

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \tag{3}$$

nazywamy równaniem jednorodnym.

Twierdzenie 2 *Niech $y_1(t)$ i $y_2(t)$ będą dwoma rozwiązaniami równania jednorodnego (3) na przedziale (a, b) takimi, że*

$$y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) \neq 0$$

dla każdego $t \in (a, b)$. Wówczas każde rozwiązanie równania jednorodnego (3) można zapisać jako

$$c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$$

dla pewnych stałych c_1 i c_2.

Zad. 1. Wykazać, że równanie Riccatiego $x' + p(t)x + q(t)x^2 + r(t) = 0$ można sprowadzić do równania liniowego drugiego rzędu poprzez podstawienie

$$q(t)x(t) = \frac{y'(t)}{y(t)}.$$

Zad. 2. Wykazać, że mając jednorodne równanie drugiego rzędu można je, poprzez odpowiednie podstawienie, sprowadzić do równania Riccatiego.

Zad. 3. Udowodnić twierdzenie 2.

Definicja 2 *Niech funkcje $y_1(t)$ i $y_2(t)$ będą różniczkowalne na przedziale (a, b). Wówczas wyrażenie*

$$W(y_1, y_2)(t) = det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$$

nazywamy wyznacznikiem Wrońskiego (wrońskianem) układu funkcji $y_1(t)$, $y_2(t)$. Jeżeli $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$ dla każdego $t \in (a, b)$, to wówczas układ funkcji $y_1(t)$, $y_2(t)$ nazywamy liniowo niezależnym.

Zad. 4. Udowodnić, że jeśli $y_1(t)$ i $y_2(t)$ są liniowo zależnymi rozwiązaniami równania jednorodnego (3), to wówczas istnieje stała α taka, że $y_1(t) = \alpha y_2(t)$ lub $y_2(t) = \alpha y_1(t)$.

Zad. 5. Pokazać, że jeżeli $y_1(t)$ i $y_2(t)$ są dwoma różnymi rozwiązaniami szczególnymi równania (1), to wówczas $y_1(t) - y_2(t)$ jest rozwiązaniem równania jednorodnego (3).

Uwaga 1 *Układ liniowo niezależnych rozwiązań (3) nazywa się fundamentalnym układem rozwiązań równania (3).*

Twierdzenie 3 *Jeżeli $x(t)$ jest nietrywialnym (różnym tożsamościowo od zera) rozwiązaniem równania (3), to przez podstawienie*

$$y(t) = x(t) \int z(t)dt$$

równanie sprowadza się do równania liniowego jednorodnego pierwszego rzędu (względem nowej zmiennej z).

Zad. 6. Udowodnić twierdzenie 3.

Zad. 7. Korzystając z metody obniżania rzędu wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania (3), jeżeli znane jest jedno z jego rozwiązań.

Zad. 8. Niech $x_1(t)$ i $x_2(t)$ będą rozwiązaniami równania (3), gdzie p i q są ciągłe w pewnym przedziale (a, b). Niech $w(t) = W(x_1, x_2)(t)$ oznacza wrońskian układu funkcji $x_1(t)$, $x_2(t)$.

(a) Sprawdzić, że $W' + p(t)W = 0$.

(b) Wykazać, że dla dowolnych $t, t_0 \in (a, b)$ zachodzi (tzw. wzór Liouville'a)

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} p(s)ds\right).$$

(c) Wykazać, że wrońskian jest albo tożsamościowo równy zero albo nie zeruje się w żadnym punkcie przedziału (a, b).

Zad. 9. Sprawdzić, czy funkcje $y_1 = e^{2x}$ i $y_2 = xe^{2x}$ tworzą układ fundamentalny równania $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Zad. 10. Wiedząc, że $y_1(t)$ jest rozwiązaniem równania, znaleźć rozwiązanie ogólne

(a) $y'' + \frac{2t}{t^2-1}y' - \frac{2}{t^2-1}y = 0$, $y_1(t) = t$;

(b) $ty'' - y' - 4t^3y = 0$, $y_1(t) = e^{t^2}$;

(c) $t^2y'' - ty' - 3y = 0$, $y_1(t) = \frac{1}{t}$.

Zad. 11. Wiedząc, że $y_1(t)$ jest rozwiązaniem równania, korzystając ze wzoru Liouville'a wskazać układ fundamentalny układu i rozwiązanie ogólne

(a) $y'' + \frac{1-2t}{t}y' + \frac{t-1}{t}y = 0$, $y_1(t) = e^t$, $t > 0$;

(b) $t^3y'' + ty' - y = 0$, $y_1(t) = t$;

(c) $ty'' + 2y' + ty = 0$, $y_1(t) = \frac{\sin t}{t}$.