8. Twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań

Twierdzenie 1 (Picarda - Lindelöfa) *Niech* $f(t,x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *będzie ciągła w zbiorze* $Q = \{(t,x) : \ |t-t_0| \le a, \ |x-x_0| \le b\}$, *przy czym* $\sup\limits_{(t,x)\in Q} |f(t,x)| = M$ *oraz niech spełnia w* Q *warunek Lipschitza względem zmiennej* x *w zbiorze* Q, *tzn.*

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \le L|x_1 - x_2|$$

dla pewnej stałej L. *Wtedy zagadnienie Cauchy'ego*

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0,$$

posiada jednoznaczne rozwiązanie na przedziale $|t-t_0| \le \alpha$, *gdzie* $\alpha < \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$.

Ciąg kolejnych przybliżeń (**iteracje / przybliżenia Picarda**):

$$x_1(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x_0(s))ds,$$

$$x_2(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x_1(s))ds,$$

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))ds, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Twierdzenie 2 (Peano) *Niech* $f(t,x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *będzie ciągła w zbiorze* $Q = \{(t,x) : \ t \in [t_0, t_0 + a], \ |x - x_0| \le b\}$, *przy czym* $\sup\limits_{(t,x)\in Q} |f(t,x)| = M$. *Wtedy zagadnienie Cauchy'ego*

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0,$$

ma rozwiązanie na przedziale $[t_0, t_0 + \alpha]$, *gdzie* $\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$.

Uwaga 1 *Niech* $g : A \to X$ *będzie odwzorowaniem klasy* C^1, *gdzie* A *jest podzbiorem otwartym skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej unormowanej. Wtedy* f *spełnia loalny warunek Lipschitza.*

Zad. 1. Pokazać, że funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ spełniająca warunek Lipschitza jest ciągła w każdym punkcie.

Zad. 2. Czy następujące odwzorowania spełniają warunek Lipschitza
a) $y = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$; b) $y = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$;
c) $y = \sqrt{x}$, $x > 0$; d) $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$;
e) $y = x^2$, $x \in [a,b]$; f) $y = |x|$.

Zad. 3. Obliczyć pierwsze dwie iteracje Picarda dla zagadnienia

$$y' = t^2 + y^2, \quad y(0) = 1.$$

Zad. 4. Obliczyć pierwsze trzy iteracje Picarda dla zagadnienia

$$y' = e^t + y^2, \quad y(0) = 0.$$

Zad. 5. Wyprowadzić wzór na n-tą iterację Picarda i obliczyć jej granicę dla $n \to \infty$ dla zagadnień
a) $y' = y$, $y(0) = 1$;
b) $y' = 2ty$, $t(0) = 1$;
c) $y' = 2t(y+1)$, $y(0) = 0$.

Zad. 6. Rozważyć równanie

$$x' = 2\sqrt{|x|}$$

wraz z warunkiem początkowym $x(0) = 0$. Co można powiedzieć o istnieniu rozwiązań tego zagadnienia? Co można powiedzieć o jednoznaczności rozwiązań?

Zad. 7. Oszacować długość przedziału, na którym określone jest rozwiązanie problemu

$$x' = \sin x + t, \quad x(0) = 0.$$

Znaleźć możliwie najdłuższy przedział, na którym określone jest rozwiązanie.

Zad. 8. Rozważmy układ

$$\begin{cases} x_1' = \sin(x_1 + t) - x_2^2, \\ x_2' = 2\cos^3(x_1) + x_2, \\ x_3' = x_1 t^3 - x_3, \end{cases}$$

wraz z warunkiem początkowym $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$, $x_3(0) = 3$. Co można powiedzieć o rozwiązaniach tego układu?

Zad. 9. Rozważmy zagadnienie

$$\dot{x} = 2\sqrt{x}, \quad x(0) = 0.$$

Co można powiedzieć o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań?

Zad. 10. Czy wykresy dwóch różnych rozwiązań równania $\dot{x} = x^2 + t$ mogą się przecinać w pewnym punkcie (t_0, x_0)?

Zad. 11. Pokazać, że rozwiązanie poniższych zagadnień istnieje i jest jednoznaczne na pewnym przedziale (wskazać ten przedział)
a) $y' = y + e^y + e^{-x}$, $y(0) = 0$, $0 \le x \le 1$;
b) $y' = e^{-x^2} + y^2$, $y(0) = 0$, $0 \le x \le \frac{1}{2}$;
c) $y' = 1 + y + y^2 \cos x$, $y(0) = 0$, $0 \le x \le \frac{1}{3}$;
d) $y' = e^{-x^2} + y^2$, $y(0) = 1$, $0 \le x \le \frac{\sqrt{2}}{1+(1+\sqrt{2})^2}$.

Zad. 12. Rozważyć zagadnienie $y = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$. Niech D będzie prostokątem $0 \le x \le a$, $-b \le y \le b$.

(a) Udowodnić, że istnieje jednoznaczne rozwiązanie zagadnienia dla $0 \le x \le \min\left\{a, \frac{b}{a^2+b^2}\right\}$.

(b) Pokazać, że maksymalna wartość wyrażenia $\frac{b}{a^2+b^2}$ przy ustalonym a wynosi $\frac{1}{2a}$.

(c) Pokazać, że $\min\left\{a, \frac{1}{2a}\right\}$ jest największe dla $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Zad. 13. Korzystając z metody kolejnych przybliżeń Picarda, znaleźć rozwiązania układu

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1, \\ x_1(0) = 0, \ x_2(0) = 1. \end{cases}$$