7. Zadania różne

Zad. 1. Narysować niektóre izokliny i za ich pomocą naszkicować przybliżony przebieg niektórych rozwiązań równania:
a) $y' = y^2 - t$; b) $y' = \frac{ty}{t+y}$.

Zad. 2. Niech $a \in (0, 1)$. Udowodnić, że jeśli $x_0 \in (a, 1)$, to rozwiązanie $x(t)$ zagadnienia początkowego

$$\dot{x} = rx(x-a)(1-x), \quad x(t_0) = x_0,$$

spełnia nierówność $a < x(t) < 1$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.

Zad. 3. Rozwiązać równanie

$$\dot{x} = rx(x-a)(1-x), \quad x(0) = x_0 > 0.$$

Zad. 4. Wyznaczyć czas, po którym woda wypełniająca półkulisty pojemnik o średnicy 2 m wypłynie z niego przez okrągły otwór o średnicy 0,2 m wycięty w jego dnie, jeżeli prędkość wypływu wody $v = 0,6\sqrt{2gh}$ cm/s, przy czym h jest wysokością słupa wody nad otworem, a g oznacza przyspieszenie grawitacyjne.

Zad. 5. Znaleźć krzywą, której styczne tworzą z osiami układu współrzędnych trójkąt o powierzchni $2a^2$.

Zad. 6. Znaleźć krzywą o tej własności, że w dowolnym jej punkcie współczynnik kierunkowy stycznej jest równy stosunkowi rzędnej do odciętej punktu styczności wziętej ze znakiem przeciwnym.

Zad. 7. Korzystając z twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań wyznaczyć na płaszczyźnie xOy zbiór tych punktów (x_0, y_0), przez które przechodzi dokłądnie jedna krzywa całkowa równań:
a) $y' = x - \ln y$; b) $(2x + y)y' = 2x - y$.

Zad. 8. Rozwiązać problem początkowy Cauchy'ego

$$\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right) dx - x dy = 0, \quad y(1) = 0.$$

Zad. 9. Znaleźć całkę ogólną równania

$$(1 + y^2)dx = \left(\sqrt{1 + y^2} \sin y - xy\right) dy.$$

Zad. 10. Rozwiązać równanie

$$\left(\frac{x}{y} + 1\right) dx + \left(\frac{x}{y} - 1\right) dy = 0.$$

Zad. 11. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$xy' = y^2 - (2x + 1)y + x^2 + 2x$$

wiedząc, że funkcja $y = ax + b$ jest jego rozwiązaniem szczególnym.

Zad. 12. Rozwiązać równanie

$$(1+\sin^2 x)y' + y\sin 2x = \cot x + \cos x \sin x.$$

Zad. 13. Znaleźć całkę ogólną równania

$$(3xy - 2x^2y - 3xy^2)dx + (2x^3 + 3x^2y - 4x^2)dy = 0.$$

Zad. 14. Znaleźć „formalne" rozwiązanie zgadnienia początkowego

$$y' = y^2 - x^2, \quad y(0) = 1, \tag{1}$$

w postaci szeregu potęgowego $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ (tzn. podstawić szereg do (1) i znaleźć równania na współczynniki a_k). Uzasadnić, że otrzymany szereg jest zbieżny dla $x \in (-1, 1)$ do rozwiązania zagadnienia (1).

Zad. 15. Znaleźć rozwiązanie $y(t)$ równania różniczkowego liniowego niejednorodnego

$$y' \cos t - y \sin t = -\sin 2t$$

spełniające warunek $\lim_{t \to \frac{\pi}{2}} y(t) = 0$.

Zad. 16. Dane jest równanie $\dot{x} \sin 2t = 2(x + \cos t)$. Znaleźć takie jego rozwiązanie, które jest ograniczone dla $t \to \frac{\pi}{2}$.

Zad. 17. Znaleźć rozwiązanie równania różniczkowego liniowego niejednorodnego

$$t^2 y' + y = (t^2 + 1)e^t$$

spełniające warunek $\lim_{t \to -\infty} y(t) = 1$.

Zad. 18. Niech funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie ciągła i ograniczona na całym $\mathbb{R}$. Wykazać, że równanie

$$y' + y = f(t)$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie ograniczone na całym $\mathbb{R}$.

Zad. 19. Dla jakich a równanie $x' + ax = 1$ ma tylko rozwiązania ograniczone?

Zad. 20. Wykazać, że równanie

$$t\dot{y} - (2t^2 + 1)y = t^2$$

ma tylko jedno rozwiązanie, dla którego granica przy $t \to \infty$ jest skończona. Wyznaczyć tę granicę.