6. Równania jednorodne

Definicja 1 *Funkcję $f(x,y)$ nazywamy funkcją jednorodną stopni n, jeżeli*

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y), \ t > 0$$

Jeżeli funkcje $M(x,y)$ oraz $N(x,y)$ są jednorodne stopnia n, to równanie

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

nazywamy równaniem jednorodnym stopnia n.

Twierdzenie 1 *Niech dane będzie równanie jednorodne stopnia n postaci (1). Jeżeli $M(x,y)$ oraz $N(x,y)$ są ciągłe w zbiorze $Q = \left\{(x,y): \ a < \frac{y}{x} < b\right\}$ oraz*

$$xM(x,y) + yN(x,y) \neq 0,$$

to przez każdy punkt $(x_0, y_0) \in Q$ przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa równania (1).

Rozwiązanie otrzymujemy stosując podstawienie

$$y = u(x)x \quad \text{lub} \quad x = v(y)y.$$

Podstawiając $y = ux$ do równania (1) otrzymujemy równanie o zmiennych rozdzielonych

$$\frac{dx}{x} = -\frac{N(1,u)}{M(1,u) + uN(1,u)}du. \tag{2}$$

Ponieważ $M(1,u) + uN(1,u) \neq 0$, więc funkcja po prawej stronie jest ciągła i ma funkcję pierwotną. Możemy więc scałkować stronami i dostać rozwiązanie. Zgodnie z Tw. 1 całkowanie równania (2) jest możliwe w takim obszarze Q, który nie zawiera punktów o współrzędnej $x = 0$. Jeżeli Q zawiera takie punkty, a nie zawiera punktów o współrzędnej $y = 0$, to stosujemy podstawienie $x = vy$.

Zad. 1. Pokazać, że stosując podstawienie $y = ux$ z równania (1) dostajemy równanie (2).

Zad. 2. Rozwiązać równania:

a) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$;
b) $y' = \frac{x^2+xy-y^2}{x^2-2xy}$;
c) $t^2 dy = (y^2 - ty + t^2)dt$;
d) $(x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy = 0$;
e) $y(\ln y - \ln x)dx - xdy = 0$;
f) $y' = \frac{4x^2+y^2}{2xy}$;
g) $y' = (\ln y^2 - \ln x^2 + 1)\frac{y}{x}$;
h) $xy' - y = x\tan\frac{y}{x}$;
i) $xy' - y = (x+y)\ln\frac{x+y}{x}$;
j) $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

Zad. 3. Pokazać, że równanie postaci $y' = f(ax+by+c)$, gdzie $a, b \neq 0$, f jest ciągła, można sprowadzić do postaci równania o zmiennych rozdzielonych

$$\frac{du}{dx} = a + bf(u)$$

za pomocą podstawienia $u = ax + by + c$.

Zad. 4. Rozwiązać równania:

a) $y' = \cos(x - y)$;

b) $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$;

c) $y' = \cos(y - x)$;

d) $(x + 2y)y' = 1$;

e) $y' = \frac{1}{2x+y} + 2x + y - 2$;

f) $2x + 3y - 1 + (4x + 6y - 5)y' = 0$.

Zad. 5. Pokazać, że równanie $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$, gdzie $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, można sprowadzić do równania jednorodnego

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right)$$

stosując podstawienie $u = x - x_0$, $v = y - y_0$, gdzie x_0 i y_0 są rozwiązaniami układu $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

Zad. 6. Pokazać, że równanie $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$, gdzie $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, można sprowadzić do równania o zmiennych rozdzielonych

$$\frac{dz}{dx} = a_1 + b_1 f\left(\frac{z + c_1}{kz + c_2}\right)$$

stosując podstawienie $z = a_1x + b_1y$, gdzie $k = \frac{a_2x+b_2y}{a_1x+b_1y}$.

Zad. 7. Rozwiązać równania:

a) $y' = -\frac{x+y-4}{x-y+2}$;

b) $2(x - 2y + 1) + (5x - y - 4)y' = 0$;

c) $x - 2y + 9 - (3x - 6y + 19)y' = 0$;

d) $y' = \frac{2x+3y-5}{5x-5}$;

e) $(x + 4y)y' = 2x + 3y - 5$;

f) $(2x + y + 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0$;

g) $y' = \frac{1}{2x+y} + 2x + y - 2$;

h) $2x + 3y - 1 + (4x + 6y - 5)y' = 0$.