Zestaw zadań z Równań różniczkowych zwyczajnych
dla kierunku Matematyka, rok akadem. 2015/2016

---

5. Równanie w postaci różniczki zupełnej

Twierdzenie 1 *Załóżmy, że w zbiorze $Q = \{(x, y) : x \in (a, b), y \in (c, d)\}$ funkcje $M(x, y)$, $M_y(x, y)$, $N(x, y)$ oraz $N_x(x, y)$ są ciągłe, spełniona jest równość $M_y(x, y) = N_x(x, y)$ oraz jedna z funkcji M lub N jest różna od zera w Q. Wówczas przez każdy punkt $(x_0, y_0) \in Q$ przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa równania*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \tag{1}$$

Korzystając z powyższego twierdzenia znajdujemy rozwiązanie w postaci uwikłanej $F(x, y) = c$. Warunek z twierdzenia gwarantuje spełnienie założeń Twierdzenia o funkcji uwikłanej (nie oznaczo to, że równanie można rozwikłać).

Całkując równanie (1) korzystamy z faktu, że całka krzywoliniowa nie zależy od drogi całkowania i całkujemy po odcinkach równoległuch do osi układu współrzędnych.

Funkcję F można znaleźć też w następujący sposób:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y) \Longrightarrow F(x, y) = \int_{y_0}^{y} N(x, \tau)d\tau + C(x).$$

Następnie różniczkujemy otrzymany wynik względem x (uwzględniając, że stała całkowania zależy od x), przyrównujemy do $M(x, y)$ i całkując wyznaczamy $C(x)$.

Zad. 1. Scałkować równania:

a) $(t + y)dt + tdy = 0$;
b) $t(3ty - 2)dt + (t^3 + 2y)dy = 0$;
c) $y'y = t^2 + 1$;
d) $(2te^y + 2e^t)dt + (t^2e^y + 3y^2 + 1)dy = 0$;
e) $(2x + 3x^2y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0$;
f) $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$;
g) $\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$;
h) $e^{-y}dx = (2y + xe^{-y})dy$.

Zad. 2. Znaleźć rozwiązanie równania:

a) $(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0$;
przechodzące przez punkt $(1, 1)$.
b) $2x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right)dx = \sqrt{x^2 - y}dy$;

Definicja 1 *Funkcję $\mu(x, y)$ nazywamy czynnikiem całkującym równania postaci (1), jeżeli równanie różniczkowe*

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0$$

jest równaniem zupałnym.

Jeżeli znamy czynnik całkujący równania (1), to całkowanie tego równania polega na pomnożeniu obu jego stron przez ten czynnik, a następnie scałkowaniu otrzymanego równania zupełnego. Przy czym, tak otrzymana całka może zawierać rozwiązania obce, jeżeli wzdłuż pewnej krzywej czynnik się zeruje. Możemy też zgubić pewne rozwiązania, jeżeli wzdłuż pewnej krzywej czynnik staje się nieskończony.

- Jeżeli $\frac{1}{M}(N_x - M_y) = g(y)$, to

$$\mu = \mu(y) = \exp\left(\int g(y)dy\right).$$

- Jeżeli $\frac{1}{N}(M_y - N_x) = f(x)$, to
$$\mu = \mu(x) = \exp\left(\int f(x)dx\right).$$
- Jeżeli istnieją takie funkcje $f(x)$ i $g(y)$, że $M_y - N_x = Nf(x) - Mg(y)$, to
$$\mu = \mu(x,y) = \exp\left(\int f(x)dx\right) \cdot \exp\left(\int g(y)dy\right).$$

Zad. 3. Udowodnić, że podane wyżej funkcje μ są czynnikami całkującymi.

Zad. 4. Znaleźć rozwiązania równania:

a) $ydt - (t-y)dy = 0$;
b) $tydt = t^2dy$;
c) $ydt + (2t - ye^y)dy = 0$;
d) $(3t^2y + 2ty + y^3)dt + (t^2 + y^2)dy = 0$;
e) $y^2dx + (xy - 1)dy = 0$;
f) $(\sin x + e^y)dx + \cos xdy = 0$;
g) $2x(1 + e^y)dx + e^y(1 + x^2)dy = 0$;
h) $(x^2 + 3\ln y)ydx = xdy$.

Zad. 5. Równanie różniczkowe może mieć więcej niż jeden czynnik całkujący. Udowodnić, że
$$\mu_1(x,y) = \frac{1}{xy}, \quad \mu_2(x,y) = \frac{1}{y^2}, \quad \mu_3(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$$
są czynnikami całkującymi równanie
$$ydx - xdy = 0.$$
Uzasadnić, że otrzymane za pomocą tych czynników całkujących rozwiązania są równoważne.