4. Równania Bernoulliego i Riccatiego

Definicja 1 *Równaniem Bernoulliego nazywamy równanie postaci*

$$\dot{x} + p(t)x = q(t)x^n, \tag{1}$$

gdzie $p(t)$ i $q(t)$ są funkcjami ciągłymi dla $t \in (a,b)$, zaś $n \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ (dla $n=0$ i $n=1$ równanie (1) jest równaniem liniowym).

Równanie (1) sprowadza się do równania liniowego przez podstawienie

$$y = x^{1-n}.$$

Po podzieleniu (1) przez x^n otrzymujemy

$$\dot{x}x^{-n} + p(t)x^{1-n} = q(t).$$

Powyższe równanie można przepisać jako równanie na y. Ponieważ $\dot{y} = (1-n)x^{-n}\dot{x}$, więc otrzymujemy następujące równanie liniowe

$$\frac{1}{1-n}\dot{y} + p(t)y = q(t).$$

Zad. 1. Znaleźć rozwiązanie równania:

a) $t\dot{x} + x = x^2 \ln t$;
b) $\dot{x} = tx + t^3x^2$;
c) $\dot{y} - 2y = 2\sqrt{y}$;
d) $3\dot{y} - y = \frac{t}{y^2}$;
e) $\dot{y} = y^2e^t - y$;
f) $2t\dot{y} = (t+1-6y^2)y$;
g) $\dot{y} + 2y = y^2e^t$, $y(0) = 0,5$;
h) $\dot{y} - y = \frac{t}{y}$, $y(0) = -1$;
i) $\dot{y} - y\cos t = y^2\cos t$, $y(0) = 1$;
j) $t\dot{y} - y^2\ln t + y = 0$, $y(e) = 1$.

Zad. 2. Znaleźć krzywe, dla których odcinek odcięty przez styczną na osi OY jest równy kwadratowi rzędnej punktu styczności.

Definicja 2 *Równaniem Riccatiego nazywamy równanie postaci*

$$\dot{x} + p(t)x + q(t)x^2 = r(t). \tag{2}$$

Nie istnieje ogólny sposób analitycznego scałkowania równania Riccatiego. Jeżeli jednak znamy jakieś rozwiązanie $x_1(t)$, to przez podstawienie $u = x - x_1$ można to równanie sprowadzić do równania Bernoulliego z wykładnikiem 2:

$$\dot{u} + [p(t) + 2q(t)x_1(t)]\,u + q(t)u^2 = 0,$$

a takie równanie sprowadzamy do liniowego za pomocą podstawienia $y = u^{-1}$.

Zad. 3. Wykazać, że podstawienie $u = x - x_1$ sprowadza równanie (2) do równania Bernoulliego o wykładniku 2.

Zad. 4. Zgadnąć całkę szczególną i rozwiązać równanie:

a) $\dot{x} - 2tx + x^2 = 5 - t^2$;
b) $\dot{x} + 2xe^t - x^2 = e^{2t} + e^t$;
c) $\dot{x} + x^2 + \frac{1}{4t^2} = 0$;
d) $\dot{x} + x^2 = 2t^{-2}$;
e) $t^2\dot{x} + tx + t^2x^2 = 4$;
f) $3\dot{x} + x^2 + \frac{2}{t^2} = 0$.