Zestaw zadań z Równań różniczkowych zwyczajnych
dla kierunku Matematyka, rok akadem. 2015/2016

---

3. Równania liniowe

Zad. 1. Udowodnić, że jeśli $x_0 \in (0, K)$, to rozwiązanie $x(t)$ zagadnienia początkowego

$$\dot{x} = rx(K - x), \quad x(t_0) = x_0,$$

spełnia nierówność $0 < x(t) < K$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.

Definicja 1 *Równaniem liniowym nazywamy równanie postaci*

$$\dot{x}(t) + p(t)x(t) = q(t), \tag{1}$$

gdzie $p(t)$ i $q(t)$ są funkcjami ciągłymi dla $t \in (a, b)$. Jeżeli $q(t) \equiv 0$, to równanie (1) nazywamy jednorodnym.

Twierdzenie 1 *Jeśli funkcje $p(t)$ i $q(t)$ są ciągłe dla $t \in (a, b)$, to przez każdy punkt zbioru $Q = (a, b) \times \mathbb{R}$ przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa równania (1). Maksymalnym przedziałem istnienia każdego takiego rozwiązania jest przedział (a, b).*

Zad. 2. Rozwiązać równanie (1) korzystając z metody uzmienniania stałej.

Zad. 3. Rozwiązać równanie (1) korzystając z metody czynnika całkującego.

Zad. 4. Znaleźć rozwiązania ogólne równań liniowych:

a) $xy' + 2y = 3x$; b) $y' \sin x - y = 1 - \cos x$;
c) $\dot{x} + tx = 1 + t$; d) $x' + x \cos t = 0$;
e) $x' + x = te^t$; f) $x' + \frac{2t}{1+t^2}x = \frac{1}{1+t^2}$;
g) $ty' + t^2 + ty = y$; h) $y' \cos t - y \sin t = 1$;
i) $y' + \frac{2y}{t} = \frac{\cos t}{t^2}$; j) $y' + 2y = te^{-t} + 2$;
k) $y' = t + 2y + ty + 2$; l) $(t^2 + 4)y' + 3ty = t$.

Zad. 5. Dla jakich a równanie

$$x' + ax = 1$$

ma tylko rozwiązania ograniczone?

Zad. 6. ($\star$) Niech funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie ciągła i ograniczona na całym $\mathbb{R}$. Wykazać, że równanie

$$y' + y = f(t)$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie ograniczone na całym $\mathbb{R}$. Dodatkowo wykazać, że jeśli f jest funkcją okresową, to ograniczone rozwiązanie tego równania jest też okresowe.