

2. Równanie o zmiennych rozdzielonych

Definicja 1 *Równanie*

$$\dot{x} = f(t, x)$$

nazywamy równaniem o zmiennych rozdzielonych, jeśli funkcja dwóch zmiennych $f(t, x)$ jest iloczynem dwóch funkcji jednej zmiennej, tj.

$$f(t, x) = g_1(t)g_2(x). \quad (1)$$

Twierdzenie 1 *Dane jest równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych (1). Niech funkcje $g_1(t)$ i $g_2(t)$ będą ciągłe dla $t \in (a, b)$ i $x \in (c, d)$ oraz niech $g_2(x)$ nie ma zer w przedziale (c, d) . Wtedy przez każdy punkt (t_0, x_0) prostokąta $Q = \{(t, x) : t \in (a, b), x \in (c, d)\}$ przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa równania (1). Krzywa przechodząca przez punkt (t_0, x_0) jest dana wzorem*

$$x(t) = G_2^{-1}(G_1(t) - G_1(t_0) + G_2(x_0)),$$

gdzie $G_1(t)$ jest funkcją pierwotną funkcji $g_1(t)$, a $G_2(x)$ — funkcją pierwotną funkcji $\frac{1}{g_2(x)}$.

Definicja 2 *Funkcja dwóch zmiennych $f(x, y)$ nazywa się funkcją jednorodną stopnia n , jeśli $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ dla $t > 0$.*

Definicja 3 *Równanie różniczkowe w postaci różniczek*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2)$$

nazywa się równaniem jednorodnym (stopnia n), jeśli funkcje $M(x, y)$ i $N(x, y)$ są funkcjami jednorodnymi stopnia n .

Twierdzenie 2 *Dane jest równanie jednorodne stopnia n w postaci różniczek (2). O funkcjach $M(x, y)$ i $N(x, y)$ zakładamy, że są funkcjami ciągłymi w zbiorze $Q = \{(x, y) : a < \frac{y}{x} < b\}$ oraz*

$$xM(x, y) + yN(x, y) \neq 0.$$

Wtedy przez każdy punkt $(x_0, y_0) \in Q$ przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa równania (2).

Zad. 1. Znaleźć rozwiązania ogólne (zależne od pewnej stałej C) równań różniczkowych:

- | | |
|--|--|
| a) $\dot{x} = e^{x+t}$; | b) $\dot{x} = \sqrt{\frac{x}{t}}$; |
| c) $\dot{x} = \frac{1+x^2}{t}$; | d) $xydx + (x+1)dy = 0$; |
| e) $e^{-s} \left(1 + \frac{ds}{dt}\right) = 1$; | f) $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$; |
| g) $e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0$; | h) $y^2 \sin x dx + \cos^2 x \ln y dy = 0$; |
| i) $\dot{y} = 2y(t+1)$; | j) $\dot{y} + 4y = y(e^{-t} + 4)$; |
| k) $(1-t^2)\dot{y} = 2y$; | l) $\sqrt{1-t^2}dy + \sqrt{1-y^2}dt = 0$. |

Zad. 2. Znaleźć krzywe całkowe danych równań przechodzące przez zadany punkt:

- | | |
|--------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$, | $y(0) = 1$; |
| b) $\dot{x} = 3\sqrt[3]{x^2}$, | $x(2) = 0$; |
| c) $2x^2yy' + y^2 = 2$, | $y(1) = 1$; |
| d) $\dot{x} \sin t - x \cos t = 0$, | $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; |
| e) $y \ln y dx + x dy = 0$, | $y(1) = 1$. |

- Zad. 3. Pies ściga zająca, który porusza się ze stałą prędkością v po linii prostej. Pies biegnie ze stałą prędkością u ($u > v$) zawsze w kierunku punktu, w którym w danej chwili znajduje się zając. Znaleźć krzywą, po której porusza się pies (krzywą pościgową) oraz czas, po jakim dogoni on zająca.
- Zad. 4. Znaleźć kształt zwierciadła, które wiązkę promieni równoległych skupia w jednym punkcie.
- Zad. 5. Znaleźć krzywą $y(x)$, dla której odcinek stycznej pomiędzy punktem styczności a osią OX ma stałą długość a .
- Zad. 6. Wiadomo, że szybkość zmian temperatury danego ciała jest proporcjonalna do różnicy między temperaturą tego ciała i temperaturą otoczenia (prawo Newtona). Zakładamy, że $S(0) = 100^{\circ}\text{C}$ w temperaturze otoczenia 20°C . Po dziesięciu minutach temperatura ciała wynosiła 60°C . Po ilu minutach ciało będzie miało temperaturę 25°C ?
- Zad. 7. Ciało zamordowanego znaleziono o godzinie 19:30. Lekarz, który przybył na miejsce morderstwa o godzinie 20:20 natychmiast zmierzył temperaturę ciała denata. Wynosiła ona $32,6^{\circ}\text{C}$. Godzinę później, gdy ciało zabierano do kostnicy, temperatura ciała nieboszczyka wynosiła $31,4^{\circ}\text{C}$. W tym czasie temperatura w pomieszczeniu wynosiła 21°C . Policja o morderstwo podejrzewa Jana G. Podejrzany twierdzi, że jest niewinny i posiada alibi, gdyż tego popołudnia był w restauracji „Domowe Psychotki”. Świadkowie zeznali, że o godzinie 17:00 Jan G. odebrał telefon, po którym natychmiast opuścił lokal. Wiedząc, że restauracja znajduje się o 5 minut od domu podejrzanego, zdecydować, czy alibi Jana G. jest niepodważalne (można przyjąć, że w ciągu popołudnia temperatura w pomieszczeniu, w którym popełniono morderstwo, nie ulegała znaczącym zmianom).
- Zad. 8. (ciąg dalszy poprzedniego) W trakcie dochodzenia okazało się, że zamordowany był tego dnia o 16:00 u lekarza, który stwierdził podwyższoną temperaturę ciała pacjenta wynoszącą $38,3^{\circ}\text{C}$. Czy Jana G. można podejrzewać o morderstwo, jeśli założymy, że temperatura ciała denata w chwili śmierci była nie niższa niż zmierzona u lekarza?
- Zad. 9. Plotka rozprzestrzenia się w populacji liczącej 1000 osób z prędkością proporcjonalną do iloczynu liczby osób, które już słyszały tę plotkę oraz liczby osób, które jej jeszcze nie słyszały. Załóżmy, że 5 osób rozprzestrzenia plotkę i po jednym dniu wie o niej już 10 osób. Ile czasu potrzeba, aby o plotce dowiedziało się 850 osób?