**Zestaw zadań z Równań różniczkowych zwyczajnych
dla kierunku Matematyka, rok akadem. 2015/2016**

---

16. Portrety fazowe

Definicja 1 *Niech ciąg* $(y_1(t), y_2(t))$ *będzie rozwiązaniem układu autonomicznego*

$$\begin{cases} y_1' &= f_1(y_1, y_2), \\ y_2' &= f_2(y_1, y_2) \end{cases} \tag{1}$$

na przedziale (a, b)*. Zbiór punktów w przestrzeni* $\mathbb{R}^2$

$$\{(y_1(t), y_2(t)) : \ t \in (a, b)\}$$

nazywamy trajektorią rozwiąznania. W tym kontekście, płaszczyznę $\mathbb{R}^2$ *nazywamy płaszczyzną fazową. Płaszczyznę fazową wraz z rodziną trajektorii nazywamy portretem fazowym.*

Definicja 2 *Punkt* (y_1^*, y_2^*) *nazywamy punktem równowagi (stanem stacjonarnym) układu autonomicznego (1), jeśli*

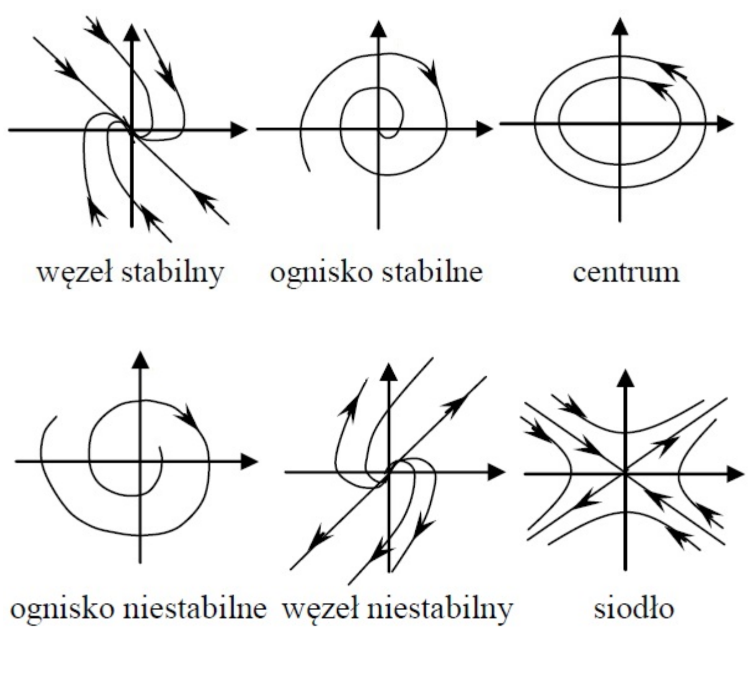
$$\begin{cases} f_1(y_1^*, y_2^*) = 0, \\ f_2(y_1^*, y_2^*) = 0. \end{cases}$$

Uwaga 1 *Każdy punkt równowagi* (y_1^*, y_2^*) *układu (1) wyznacza rozwiązanie stałe*

$$y_1(t) \equiv y_1^*, \quad y_2(t) \equiv y_2^* \quad \text{na } \mathbb{R}$$

tego układu. Rozwiązanie takie nazywamy rozwiązaniem równowagi lub rozwiązaniem stacjonarnym.

Uwaga 2 *Punkt równowagi nazywamy stabilnym, jeśli wszystkie rozwiązania startujące z punktu „dostatecznie bliskiego" punktowi równowagi pozostają „bliskie" temu punktowi dla wszystkich* $t \geq 0$*. Punkt równowagi nazywamy asymptotycznie stabilnym, jeśli wszystkie rozwiązania startujące z punktu „dostatecznie bliskiego" punktowi równowagi pozostają „bliskie" temu punktowi oraz dążą do niego, gdy* $t \to \infty$*.*



Zad. 1. Rozpatrzyć jednorodne równanie liniowe

$$\dot{x} = Ax,$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

jest stałą macierzą taką, że $\det A \neq 0$ (tzw. układ prosty). Przeprowadzić analizę zachowania się rozwiązań tego równania w otoczeniu punktu krytycznego $x = 0$.

Zad. 2. Znaleźć portret fazowy układu

$$\dot{x} = Ax,$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}.$$

Zad. 3. Określić typy punktów równowagi układu liniowego $\dot{x} = Ax$, jeśli

a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$; b) $A = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$;

c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$; d) $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$.

Zad. 4. Wyznaczyć wszystkie punkty równowagi autonomicznych układów równań różniczkowych i na podstawie linearyzacji zbadać ich stabilność

a) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1, \\ \dot{x}_2 = x_2 - x_2^2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 4x_2 - 2. \end{cases}$

Zad. 5. Zbadać stabilność stanu stacjonarnego układu nieliniowego

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 4x_2 + e^{x_1} - 1, \\ \dot{x}_2 = -x_2 - x_2 e^{x_1}. \end{cases}$$

Zad. 6. Przeanalizować stabilność stanów stacjonarnych układu Lotki-Volterry z ograniczoną pojemnością środowiska

$$\begin{cases} \dot{V} = rV\left(1 - \frac{V}{K}\right) - aVP, \\ \dot{P} = -sP + abVP, \end{cases}$$

gdzie r, a, s, b i K są dodatnimi stałymi.

Typy punktów równowagi prostych układów liniowych na płaszczyźnie

Wartości własne	Nazwa	Stabilność
rzeczywiste różne λ_1, λ_2		
$\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$	węzeł	niestabilny
$\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$	węzeł	asymptotycznie stabilny
$\lambda_1\lambda_2 < 0$	siodło	niestabilny
rzeczywiste równe $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$		
$\lambda > 0$, 1 wektor własny	węzeł zdegenerowany	niestabilny
$\lambda < 0$, 1 wektor własny	węzeł zdegenerowany	asymptotycznie stabilny
$\lambda > 0$, 2 wektory własne	węzeł gwiaździsty	niestabilny
$\lambda < 0$, 2 wektory własne	węzeł gwiaździsty	asymptotcznie stabilny
zespolone $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, gdzie $\beta \neq 0$		
$\alpha > 0$	ognisko	niestabilny
$\alpha < 0$	ognisko	asymptotycznie stabilny
$\alpha = 0$	centrum	stabilny