Zestaw zadań z Równań różniczkowych zwyczajnych dla kierunku Matematyka, rok akadem. 2015/2016

---

15. Stabilność w sensie Lapunowa

Definicja 1 *Niech dany będzie układ równań*

$$\dot{x}(t) = f(t, x), \tag{1}$$

z funkcją $f : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^m$ *klasy* C^1. *Niech* $\bar{x}(t)$ *będzie rozwiązaniem tego układu w przedziale* $[0, +\infty)$. *Mówimy, że rozwiązanie* $\bar{x}(t)$ *jest stabilne w sensie Lapunowa dla* $t \to +\infty$, *jeśli dla każdego* $\varepsilon > 0$ *istnieje takie* $t_0 \geq 0$ *oraz* $\eta > 0$, *że każde rozwiązanie* $x(t)$ *układu (1), takie że*

$$|x(t_0) - \bar{x}(t)| < \eta,$$

spełnia dla $t > t_0$ *warunek*

$$|x(t) - \bar{x}(t)| < \varepsilon.$$

Jeśli dodatkowo

$$\lim_{t \to +\infty} |x(t) - \bar{x}(t)| = 0,$$

to mówimy, że rozwiązanie $\bar{x}(t)$ *równania (1) jest asymptotycznie stabilne.*

Zad. 1. Zbadać stabilność rozwiązania zerowego układu liniowego

$$\dot{x} = Ax, \quad \text{gdzie} \quad A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

Zad. 2. Zbadać stabilność rozwiązań zagadnień Cauchy'ego

a) $\frac{dx}{dt} = -x$, $x(0) = 1$;

b) $\frac{dx}{dt} = x$, $x(0) = 1$;

c) $\frac{dx}{dt} = -x + t^2$, $x(1) = 1$;

d) $\dot{x} = 2t(x+1)$, $x(0) = 0$;

e) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= -x + y, \\ \frac{dy}{dt} &= -2y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) &= 1, \\ y(0) &= 0; \end{cases}$

f) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= -x - 9y, \\ \frac{dy}{dt} &= x - y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) &= 0, \\ y(0) &= 0. \end{cases}$

Zad. 3. Zbadać stabilność rozwiązań zerowych układów

a) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= -2x + y, \\ \frac{dy}{dt} &= -y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) &= 0, \\ y(0) &= 0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= x + y, \\ \frac{dy}{dt} &= 2y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) &= 0, \\ y(0) &= 0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -x, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) &= 0, \\ y(0) &= 0. \end{cases}$

Rozważmy równanie

$$\dot{x} = f(x), \tag{2}$$

gdzie f jest określona na zbiorze otwartym $Q \subset \mathbb{R}^m$ zawierającym początek układu współrzędnych. Zakładamy, że f jest klasy C^1 oraz $f(0) = 0$.

Definicja 2 *Funkcją Lapunowa dla równania (2) nazywamy funkcję $V(x)$ klasy C^1 w Q spełniającą warunki*

(a) $V(x) \geq 0$,

(b) $V(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(c) jeżeli $x(t)$ jest rozwiązaniem równania (2), to funkcja złożona $V(x(t))$ jest nierosnącą funkcją zmiennej t.

Uwaga 1 *Warunek (c) z powyższej definicji pozornie wymaga znajomości rozwiązania równania (2). Jednak warunek braku wzrostu funkcji $V(x(t))$ oznacza, że*

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \leq 0.$$

Wykonując to różniczkowanie, warunek (c) można napisać następująco

(c') $gradV \cdot f \leq 0$.

Można go więc sprawdzić bez znajomości rozwiązań równania (2).

Twierdzenie 1 *Niech f będzie określona na zbiorze otwartym Q zawierającym początek układu współrzędnych. Zakładamy, że f jest klasy C^1 oraz spełnia warunek $f(0) = 0$. Jeśli dla równania (2) z odwzorowaniem f istnieje funkcja Lapunowa, to rozwiązanie $\bar{x}(t) \equiv 0$ równania (2) jest stabilne. Jeśli dodatkowo*

$$gradV \cdot f < 0$$

dla $x \in Q \backslash \{0\}$, to rozwiązanie $\bar{x}(t) \equiv 0$ jest asymptotycznie stabilne.

Twierdzenie 2 *Niech dana będzie funkcja $V(x)$ klasy C^1 w pewnym otoczeniu Q początku układu współrzędnych. Jeżeli $V(x)$ spełnia warunki*

(a) $V(0) = 0$,

(b) dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje x, takie że $|x| < \varepsilon$ i $V(x) > 0$,

(c) $gradV \cdot f > 0$ *dla* $x \in Q \backslash \{0\}$,

to rozwiązanie zerowe układu (2) nie jest stabilne w sensie Lapunowa.

Zad. 4. Sprawdzić, że $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ jest funkcją Lapunowa dla układu z zad. 1. Następnie zbadać stabilność i asymptotyczną stabilność rozwiązania zerowego.

Zad. 5. Sprawdzić, że $V(x) = k^2(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$ jest funkcją Lapunowa dla układu

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -k^2 \sin x_1 - bx_2. \end{cases}$$

Następnie zbadać stabilność i asymptotyczną stabilność rozwiązania zerowego.

Dany jest punkt równowagi $\bar{x}$ układu

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \tag{3}$$

Konstruujemy przybliżenie liniowe w otoczeniu $\bar{x}$ rozwijając f w szereg Taylora

$$\frac{dx}{dt} = f(\bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x})(x - \bar{x}) + O(|x - \bar{x}|^2),$$

gdzie $\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}) = A$ to macierz Jakobiego f w $\bar{x}$. Uzyskujemy przybliżenie liniowe

$$\frac{d\xi}{dt} = A\xi. \tag{4}$$

Twierdzenie 3 *Jeżeli $\bar{\xi} = 0$ jest asymptotycznie stabilnym (niestabilnym) punktem równowagi (4), to $\bar{x}$ jest asymptotycznie stabilnym (niestabilnym) punktem równowagi (3). Zwykła stabilność $\bar{\xi}$ nie rozstrzyga stabilności $\bar{x}$.*

Zad. 6. Zbadać stabilność rozwiązania zerowego układu:

a) $\begin{cases} \bar{x}_1 &= -x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \bar{x}_2 &= x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2); \end{cases}$

b) $\begin{cases} \bar{x}_1 &= -x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \bar{x}_2 &= x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2). \end{cases}$