14. Układy równań różniczkowych

Twierdzenie 1 *Jeżeli funkcje* $a_{ij}(t)$ *i* $h_i(t)$*, gdzie* $1 \leq i, j \leq n$*, są ciągłe na przedziale* (a, b) *oraz, jeżeli* $t_0 \in (a, b)$*,* $y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0 \in \mathbb{R}$*, to zagadnienie początkowe*

$$\begin{cases} y_1' &= a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + \cdots + a_{1n}(t)y_n + h_1(t), \\ y_2' &= a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + \cdots + a_{2n}(t)y_n + h_2(t), \\ \vdots & \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \ddots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ y_n' &= a_{n1}(t)y_1 + a_{n2}(t)y_2 + \cdots + a_{nn}(t)y_n + h_n(t), \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} y_1(t_0) &= y_1^0, \\ y_2(t_0) &= y_2^0, \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ y_n(t_0) &= y_n^0, \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie określone na przedziale (a, b)*.*

Twierdzenie 2

1. *Jeżeli funkcja* $y(t)$ *jest rozwiązaniem równania liniowego*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = h(t), \tag{2}$$

   to para funkcji $(y(t), y'(t))$ *jest rozwiązaniem układu liniowego*

$$\begin{cases} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= -q(t)y_1 - p(t)y_2 + h(t). \end{cases} \tag{3}$$

2. *Jeżeli para funkcji* $(y_1(t), y_2(t))$ *jest rozwiązaniem układu liniowego (3), to funkcja* $y_1(t)$ *jest rozwiązaniem równania liniowego (2).*

Uwaga 1 *Układ równań (3) powstał z równania (2) przez podstawienie*

$$y = y_1, \quad y' = y_2.$$

Zad. 1. Uzasadnić, że jeżeli $b \neq 0$, to układ równań różniczkowych

$$\begin{cases} x' &= ax + by, \\ y' &= cx + dy, \end{cases}$$

można sprowadzić do równania różniczkowego liniowego drugiego rzędu o stałych współczynnikach

$$x'' - (a + d)x' + (ad - bc)x = 0.$$

Sprawdzić, że wielomiany charakterystyczne macierzy układu i równania liniowego są takie same.

Zad. 2. Rozwiązać zagadnienia początkowe

a) $\begin{cases} x' &= x, \\ y' &= x + y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(1) &= e, \\ y(1) &= -e; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' &= x^2 + y^2, \\ y' &= 2xy, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) &= -\frac{1}{2}, \\ y(0) &= 1. \end{cases}$

Zad. 3. Korzystając z metody eliminacji rozwiązać podane układy równań ze wskazanymi warunkami początkowymi

a) $\begin{cases} x' &= x+y, \\ y' &= 2x-y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) &= 1, \\ y(0) &= 0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} tx' &= -x+ty, \\ t^2y' &= -2x+ty, \end{cases} \quad \begin{cases} x(1) &= 1, \\ y(1) &= 1. \end{cases}$

Zad. 4. Znaleźć całkę ogólną układu

$$\begin{cases} \dot{x} &= 2x+y-2z-t+2, \\ \dot{y} &= 1-x, \\ \dot{z} &= x+y-z-t+1. \end{cases}$$

Zad. 5. Podane równania różniczkowe liniowe zapisać w postaci układów liniowych

a) $y''+2y'-y=t+1$; b) $2y''-ty'+y=\sin t$.

Twierdzenie 3 *Rozważmy zagadnienie początkowe*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(t)x + f(t), \\ x(t_0) &= x_0. \end{cases} \tag{4}$$

Rozwiązanie tego zagadnienia ma postać

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x_0 + X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)f(s)ds,$$

gdzie $X(t)$ jest macierzą fundamentalną (wrońskianem) układu (4).

Zad. 6. Znaleźć rozwiązanie układu równań

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1+x_2-t^2-2, \\ \dot{x}_2 &= -2x_1+4x_2+2t^2-4t-7. \end{cases}$$

Zad. 7. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} x.$$

Zad. 8. Niech $f(t) = t^a e^{-bt}$ dla pewnych dodatnich stałych a i b. Niech c będzie stałą, taką że $0 < c < b$. Udowodnić, że istnieje taka stała K, że dla $t \geq 0$ zachodzi $f(t) \leq Ke^{-ct}$.

Wskazówka: Zbadać granicę $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{f(t)}{e^{-ct}}$.

Twierdzenie 4 *Niech λ będzie wartością własną macierzy układu (1).*

1. *Jeżeli λ jest wartością rzeczywistą i jednokrotną, a $\vec{v}$ jest dowolnym odpowiadającym jej wektorem własnym, to funkcja wektorowa*

$$e^{\lambda t}\vec{v}$$

jest rozwiązaniem układu (1).

2. *Jeżeli $\lambda = \alpha + \beta i$, $\overline{\lambda} = \alpha - \beta i$, gdzie $\beta > 0$, są wartościami zespolonymi i jednokrotnymi, a $\vec{v}$ jest dowolnym wektorem własnym odpowiadającym wartości λ, to każda z funkcji wektorowych*

$$Re(e^{\lambda t}\vec{v}), \quad Im(e^{\lambda t}\vec{v})$$

jest rozwiązaniem układu (1).

Zad. 9. Rozwiązać układ równań różniczkowych $\dot{\vec{y}} = A\vec{y}$, jeżeli

a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$;

c) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; d) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Zad. 10. Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$\dot{\vec{y}} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{y}, \quad \vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zad. 11. Znaleźć rozwiązanie ogólne układu niejednorodnego $\dot{\vec{y}} = A\vec{y} + \vec{h}(t)$, jeżeli

a) $A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -10 \end{bmatrix}$, $\vec{h}(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ 1 \end{bmatrix}$; b) $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\vec{h}(t) = \begin{bmatrix} t \\ e^t \end{bmatrix}$.