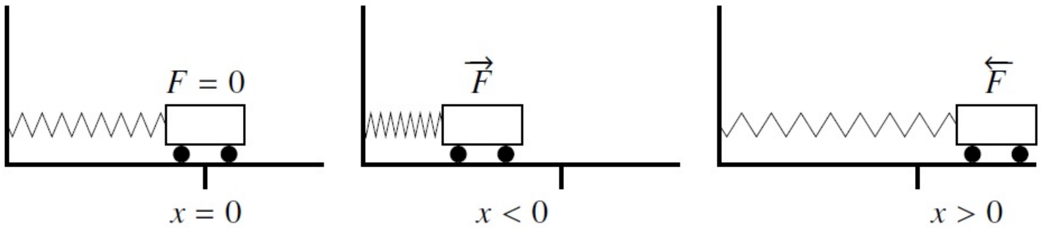
Zestaw zadań z Równań różniczkowych zwyczajnych
dla kierunku Matematyka, rok akadem. 2015/2016

13. Zadania różne

Rozważmy wózek o masie m przyczepiony do sprężyny o stałej sprężystości α (prawo Hooke'a $F(x) = -\alpha x$), na któy działa siła oporu proporcjonalna do jego prędkości ($-\beta \dot{x}$).



Równanie ruchu przyjmuje postać

$$ma = m\ddot{x} = -\alpha x - \beta \dot{x}.$$

Po wprowadzeniu oznaczeń $\frac{\beta}{m} = 2k$, $\frac{\alpha}{m} = \omega_0^2$, otrzymujemy równanie zwane równaniem oscylatora harmonicznego

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega_0^2 = 0. \tag{1}$$

Gdy na wózek działają dodatkowe siły zewnętrzne, to równanie oscylatora przyjmuje postać

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 E(t). \tag{2}$$

Zakładając brak tłumienia i sił zewnętrznych, równanie (2) przyjmuje postać

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{3}$$

Zad. 1. Znaleźć ogólne rozwiązanie równania (3) (drgania swobodne).

Zad. 2. Znaleźć ogólne rozwiązanie równania (1) (drgania tłumione) w zależności od parametru k.

Zad. 3. Znaleźć rozwiązanie równania

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 E_0 \cos(\omega t)$$

w zależności od ω.

Zad. 4. Udowodnić, że równanie $(t^2 - 1)\ddot{x} = 2x$ ma rozwiązanie $x_1(t) = P(t)$, gdzie P jest wielomianem. Wykazać, że drugie liniowo niezależne rozwiązanie tego równania ma postać

$$x_2(t) = P(t) \ln \frac{t+1}{t-1} + Q(t),$$

gdzie Q również jest wielomianem.

Zad. 5. Znaleźć rozwiązania zagadnienia początkowego
a) $y'' + \frac{3}{t}y' + \frac{1}{t^2}y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$;
b) $y'' - \frac{6}{t}y' + \frac{6}{t^2}y = \frac{1}{t} + 2t^2$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$.

Zad. 6. Zakładamy, że p i q są ciągłymi funkcjami określonymi na $\mathbb{R}$. Jednym rozwiązaniem równania

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \tag{4}$$

jest funkcja $y_1(t) = (1+t)^2$. Ponadto wiemy, że wrońskian dowolnych dwóch rozwiązań równania (4) jest stały. Znaleźć ogólną postać rozwiązania równania

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 1 + t.$$

Zad. 7. Znaleźć ogólną postać rozwiązania równania

a) $(y'')^2 - 2y'y''' + 1 = 0$; b) $(y'')^2 + y' = ty''$;

c) $yy' - 2yy' \ln y = (y')^2$; d) $y'' = e^y$.

Zad. 8. Znaleźć ogólną postać równania

a) $y'' - 5y' = 3t^2 + \sin 5t$; b) $y'' - 8y' + 20y = 5te^{4t} \sin 2t$;

c) $y'' - 8y' + 17y = (t^2 - 2t \sin t)e^{4t}$; d) $t^2y'' - ty' + y = \frac{\ln x}{x} + \frac{x}{\ln x}$.

Zad. 9. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania

$$t^3(y'' - y) = t^2 - 2.$$

Zad. 10. Znaleźć całkę ogólną równania

$$y''' - \frac{3}{x}y'' + \frac{6}{x^2}y' - \frac{6}{x^3}y = xe^x,$$

wiedząc że $y_1(x) = x$ jest całką szczególną odpowiadającego mu równania jednorodnego.

Zad. 11. Po dodatniej półosi OX porusza się punkt materialny M o macie m pod wpływem siły odwrotnie proporcjonalnej do trzeciej potęgi odciętej punktu M i zgodnie równoległej z osią OX. Znaleźć równanie ruchu tego punktu dla $x \geq 1$.

Zad. 12. Znaleźć równanie ruchu dla spadającego swobodnie ciała o masie m $[kg]$ z uwzględnieniem oporu powietrza $G = KSv^2$, gdzie $K = 0,08 \left[\frac{kGs^2}{m^4}\right]$, S $[m^2]$ jest polem maksymalnego przekroju tego ciała płaszczyzną prostopadłą do kierunku ruchu v $\left[\frac{m}{s}\right]$ jest prędkością ruchu.