12. Równania różniczkowe n-tego rzędu

Zad. 1. Rozwiązać równania:

a) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$;
b) $y^{(4)} - 16y = 0$;
c) $4y^{(4)} - 3y'' - y = 0$;
d) $y^{(5)} - y^{(4)} + 2y''' - 2y'' + y' - y = 0$;
e) $y^{(7)} + 2y^{(5)} + y''' = 0$;
f) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$.

Zad. 2. Rozwiązać równania:

a) $y''' - 4y' = (2t-1)e^{2t}$;
b) $4y''' + y' = 3e^t + 2\sin\frac{t}{2}$;
c) $y''' - 2y'' - 5y' + 6 = \sin^2 t$;
d) $y''' + y'' = 6t^2e^{-t}$;
e) $y^{(4)} + 5y'' + 4y = 3\sin t$;
f) $y^{(4)} + 3y''' + 5y'' + 5y' + 2y = 3t + e^{-t}$;
g) $y^{(4)} + y'' = \sin t$;
h) $y^{(4)} + y'' = e^t \sin t$.

Zad. 3. Rozwiązać równania wiedząc, że podane funkcje tworzą ich układy fundamentalne:

a) $y''' - \frac{3}{t}y'' + \frac{6}{t^2}y' - \frac{6}{t^3}y = \sqrt{t}$, $y_1(t) = t$, $y_2(t) = t^2$, $y_3(t) = t^3$;
b) $t^3y''' + ty' - y = 24t\ln t$, $y_1(t) = t$, $y_2(t) = t\ln t$, $y_3(t) = t\ln^2 t$.

Definicja 1 *Równanie postaci*

$$(at+b)^n y^{(n)}(t) + a_1(at+b)^{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(at+b)y'(t) + a_n y(t) = f(t) \quad (1)$$

nazywamy równaniem Eulera.

Zad. 4. Pokazać, że za pomocą podstawienia $at + b = e^\tau$ równanie Eulera (1) sprowadza się do równania n-tego rzędu o stałych współczynnikach.

Zad. 5. Wykazać, że jeśli α jest rozwiązaniem równania $\alpha^2 + (a-1)\alpha + b = 0$, to funkcja $x(t) = t^\alpha$ jest rozwiązaniem równania Eulera

$$t^2\ddot{x} + at\dot{x} + bx = 0.$$

Zad. 6. Wykazać, że każde rozwiązanie równania $y'' + \frac{k}{t^2}y = 0$, które nie jest tożsamościowo równe zeru, ma nieskończenie wiele miejsc zerowych na dodatniej półosi OX, jeśli $k > \frac{1}{4}$ i tylko skończoną liczbę, jeśli $k < \frac{1}{4}$.

Zad. 7. Rozwiązać równania:

a) $t^2y'' + 3ty' + 2y = t + 4$;
b) $t^2y'' - ty' - 2y = 0$;
c) $(t+1)^2y'' + (t+1)y' - 9y = 0$;
d) $t^3y''' - t^2y'' + 2ty' - 2y = t^3$;
e) $t^3y''' - t^2y'' - 2ty' + 6y = 0$;
f) $t^3y''' - 3t^2y'' - 12ty' + 60y = 0$.