11. Niejednorodne równania liniowe drugiego rzędu

Twierdzenie 1 *Jeśli $y_1(t)$ i $y_2(t)$ są liniowo niezależnymi rozwiązaniami równania jednorodnego*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \tag{1}$$

zaś $\varphi(t)$ jest dowolnym rozwiązaniem równania niejednorodnego

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = r(t), \tag{2}$$

to ogólne rozwiązanie równania niejednorodnego (2) zadane jest wzorem

$$y(t) = \varphi(t) + c_1y_1(t) + c_2y_2(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Zad. 1. Wiedząc, że $y_1(t) = e^{-2t}$ i $y_2(t) = e^{2t}$ są rozwiązaniami równania $y'' - 4y = 0$, a $y_c(t) = \frac{1}{4}\cos(2t) - \frac{1}{2}$ jest rozwiązaniem równania $y'' - 4y = 4\sin^2(t)$, podać rozwiązanie ogólne równania $y'' - 4y = 4\sin^2 t$.

Zad. 2. Funckje $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ są rozwiązaniami wskazanych równań niejednorodnych. Znaleźć rozwiązania ogólne tych równań

a) $\varphi(t) = 1 + \frac{1}{3}t^3$, $\psi(t) = 1 + \frac{1}{3}t^2(3+t)$, $ty'' - y' = t^2$;
b) $\varphi(t) = t + 1$, $\psi(t) \equiv 1$, $(1+t^2)y'' + ty' - y = -1$;
c) $\varphi(t) = \frac{1+t^5}{t}$, $\psi(t) = t^4$, $t^2y'' - ty' - 3y = 5t^4$.

Twierdzenie 2 *Niech funkcje $y_1(t)$ i $y_2(t)$ tworzą układ fundamentalny równania (1) i niech $c_1(t)$ i $c_2(t)$ będą funkcjami, których pochodne $c_1'(t)$ i $c_2'(t)$ spełniają układ*

$$\begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r(t) \end{bmatrix}.$$

Wówczas funkcja postaci

$$\varphi(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$$

jest rozwiązaniem równania niejednorodnego (2).

Zad. 3. Znaleźć rozwiązania równań

a) $y'' + y = \tan t$;
b) $2y'' + 4y' - 6y = 3$;
c) $y'' + y' - 2y = t^2$;
d) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2t}\ln t$;
e) $y'' - 3y' + 2y = te^{3t} + 1$;
f) $y'' + y = \frac{1}{\sin^2 t}$.

Zad. 4. Znaleźć rozwiązania podanych zagadnień początkowych

a) $y'' + 3y' + 2y = \sin(e^t)$, $y(0) = -\sin 1$, $y'(0) = -\cos 1$;
b) $y'' + 3y' + 2y = \sqrt{1 - e^t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Zad. 5. Znaleźć ogólne rozwiązanie równania

$$y'' + \frac{1}{4t^2}y = \alpha\cos t, \quad t > 0,$$

wiedząc, że $y_1(t) = \sqrt{t}$ jest rozwiązaniem równania jednorodnego.

Twierdzenie 3 (metoda przewidywań) *Niech równanie liniowe o stałych współczynnikach ma postać*

$$y'' + py' + qy = P_m(t)e^{\alpha t}\left[a\cos(\beta t) + b\sin(\beta t)\right],$$

gdzie $P_m(t)$ jest wielomianem stopnia m, natomiast $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. i niech $w(\lambda)$ będzie wielomianem charakterystycznym odpowiadającego mu równania jednorodnego, λ_1, λ_2 pierwiastki $w(\lambda)$. Wówczas

1. *jeśli $\alpha \pm \beta i \notin \{\lambda_1, \lambda_2\}$, to rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego ma postać*
$$\varphi(t) = Q_m(t)e^{\alpha t}\left[A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\right],$$
gdzie $Q_m(t)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej m, A i B — pewne stałe;

2. *jeśli $\beta \neq 0$ i $\alpha + \beta i = \lambda_1$, $\alpha - \beta i = \lambda_2$, to rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego ma postać*
$$\varphi(t) = tQ_m(t)e^{\alpha t}\left[A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\right],$$
gdzie $Q_m(t)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej m, A i B — pewne stałe;

3. *jeśli $\beta = 0$ i $\alpha = \lambda_1 \neq \lambda_2$, to rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego ma postać*
$$\varphi(t) = tQ_m(t)e^{\alpha t},$$
gdzie $Q_m(t)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej m;

4. *jeśli $\beta = 0$ i $\alpha = \lambda_1 = \lambda_2$, to rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego ma postać*
$$\varphi(t) = t^2Q_m(t)e^{\alpha t},$$
gdzie $Q_m(t)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej m;

Twierdzenie 4 *Jeśli $\psi(t)$ i $\eta(t)$ są rozwiązaniami odpowiednio równań*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad y'' + p(t)y' + q(t)y = h(t),$$

to ich suma $\psi(t) + \eta(t)$ jest rozwiązaniem równania

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) + h(t).$$

Zad. 6. Podać postać szczególnego rozwiązania równania niejednorodnego, jeśli dana jest prawa strona równania oraz pierwiastki wielomianu charakterystycznego

a) $r(t) = at^2 + bt + c$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$;
b) $r(t) = at^2 + bt + c$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$;
c) $r(t) = at^2 + bt + c$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$;
d) $r(t) = e^{-t}(at + b)$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$;
e) $r(t) = e^{-t}(at + b)$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$;
f) $r(t) = e^{-t}(at + b)$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$;
g) $r(t) = a\sin t + b\cos t$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$;
h) $r(t) = a\sin t + b\cos t$, $\lambda_1 = 1 + 2i$, $\lambda_2 = 1 - 2i$;
i) $r(t) = a\sin t + b\cos t$, $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$;
j) $r(t) = e^{-t}(a\sin t + b\cos t)$, $\lambda_1 = -1 + i$, $\lambda_2 = -1 - i$;
k) $r(t) = e^{-t}(a\sin t + b\cos t)$, $\lambda_i = 0$, $\lambda_2 = -i$;
l) $r(t) = e^{-2t}(at^2 + bt + c) + \sin t + \cos(2t)$, $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$.

Zad. 7. Rozwiązać równania

a) $y'' + y' + y = t^2$;
b) $y'' + 3y = 9t^2 - 11$;
c) $y'' + 2y' + y = e^{-1}$;
d) $y'' + 5y' + 4 = t^2e^{7t}$;
e) $y'' - 6y' + 9y = (3t^7 - 5t^4)e^{3t}$;
f) $y'' + 4y = t\sin(2t)$;
g) $y'' + y' - 6y = \sin t + te^{2t}$;
h) $y'' - 3y' + 2y = e^t + e^{2t}$.