10. Równania liniowe drugiego rzędu o stałych współczynnikach

Definicja 1 *Jeżeli współczynniki równania różniczkowego liniowego jednorodnego*

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{1}$$

są liczbami, to równanie takie nazywamy równaniem liniowym rednorodnym o stałych współczynnikach.

Uwaga 1 *Każde rozwiązanie równania różniczkowego liniowego o stałych współczynnikach jest określone na* $\mathbb{R}$.

Definicja 2 *Równanie postaci*

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

nazywamy równaniem charakterystycznym równania różniczkowego (1). Natomiast wielomian

$$w(\lambda) \stackrel{df}{=} \lambda^2 + p\lambda + q \tag{2}$$

nazywamy wielomianem charakterystycznym tego równania.

Uwaga 2 *Wielomian charakterystyczny definiujemy tylko dla równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach.*

Twierdzenie 1 *Niech* λ_1 *i* λ_2 *będą pierwiastkami wielomianu charakterystycznego (2) równania (1). Wówczas*

- *jeśli* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *i* $\lambda_1 \neq \lambda_2$, *to układ fundamentalny tego równania tworzą funkcje*
$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad y_2(t) = e^{\lambda_2 t};$$
- *jeśli* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$, *to układ fundamentalny tego równania tworzą funkcje*
$$y_1(t) = e^{\lambda t}, \quad y_2(t) = te^{\lambda t};$$
- *jeśli* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, *to przyjmując* $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, *układ fundamentalny tego równania tworzą funkcje*
$$y_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t), \quad y_2(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t).$$

Uwaga 3 *Jeśli* $y_1(t)$ *i* $y_2(t)$ *tworzą fundamentalny układ równania (1), to rozwiązanie ogólne tego równania ma postać*

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t),$$

gdzie $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Zad. 1. Znaleźć układy fundamentalne i podać rozwiązania ogólne równań

a) $6y'' - y' - y = 0$; b) $2y'' + 3y' - 2y = 0$;
c) $y'' + 6y' + 9y = 0$; d) $4y'' - 4y' + y = 0$;
e) $y'' + y = 0$; f) $y'' - 4y' + 5y = 0$.

Zad. 2. Znaleźć rozwiązania podanych zagadnień początkowych

a) $y'' - 4y' + 3y = 0$, $y(0) = 7$, $y'(0) = 16$;
b) $4y'' + 4y' + y = 0$, $y(0) = y_0$, $y'(0) = 0$;
c) $y'' + 2y' + 5y = 0$, $y(0) = -5$, $y'(0) = 3$.