Zestaw zadań z Równań różniczkowych zwyczajnych
dla kierunku Matematyka, rok akadem. 2015/2016

---

1. Wprowadzenie do równań różniczkowych

Definicja 1 *Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu n nazywamy równanie*

$$F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, ..., x^{(n)}) = 0$$

wiążące zmienną niezależną t, zmienne zależne xi ich pochodne $\dot{x}, \ddot{x}, ..., x^{(n)}$ aż do rzędu n. Rozwiązaniem tego równania nazywamy funkcję $\varphi(t)$ klasy C^n, która podstawiona do równania w miejsce x (i odpowiednio φ' w miejsce $\dot{x}$, ..., $\varphi^{(n)}$ w miejsce $x^{(n)}$) zmienia to tównanie w tożsamość.

Definicja 2 *Wykres funkcji $\varphi(t)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^{m+1}$ zmiennych (t, x) nazywamy krzywą całkową równania $F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, ..., x^{(n)}) = 0$.*

Definicja 3 *Warunek postaci*

$$x(t_0) = x_0$$

ograniczający zbiór rozwiązań równania pierwszego rzędu $\dot{x} = f(t, x)$ nazywa się warunkiem początkowym (warunkiem Cauchy'ego). Równanie $\dot{x} = f(t, x)$ uzupełnione warunkiem $x(t_0) = x_0$ nazywa się zagadnieniem początkowym (zagadnieniem Cauchy'ego).

Zad. 1. Sprawdzić, czy podana rodzina funkcji jest rozwiązaniem wskazanego równania różniczkowego:

a) $x(t) = c_1 \cos 6t + c_2 \sin 6t$,	$\ddot{x} + 36x = 0$;
b) $x(t) = \tan t$,	$\dot{x} = 1 + x^2$;
c) $x(t) = c_1 e^{6t} + c_2 e^{-6t}$,	$\ddot{x} - 36x = 0$;
d) $x(t) = c_1 e^{6t} + c_2 e^{-6t} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{36}$,	$\ddot{x} - 36x = 18t + 1$;
e) $x(t) = \frac{\sin t}{t}$,	$t\dot{x} + x = \cos t$;
f) $x(t) = ce^{-2t} + \frac{1}{3}e^t$,	$\dot{x} + 2x = e^t$;
g) $x(t) = 2 + c\sqrt{1 - t^2}$,	$(1 + t^2)\dot{x} + tx = 2t$.

Zad. 2. Znaleźć równanie różniczkowe, którego rozwiązaniem jest zadana rodzina krzywych:

a) $x(t) = e^{ct}$;	b) $x(t) = (t - c)^3$;
c) $x(t) = ct^3$;	d) $x(t) = \sin(t + c)$.

Definicja 4 *W każdym punkcie obszaru określoności D równanie*

$$\dot{y} = f(x, y)$$

określa tangens kąta nachylenia stycznej (współczynnik kierunkowy) do krzywej całkowej. Elementem kierunkowym nazywamy odcinek o środku w punkcie $(x_0, y_0) \in D$, który tworzy z dodatnim kierunkiem osi OX kąt

$$\alpha = \arctan f(x_0, y_0).$$

Zbiór wszystkich elementow kierunkowych tworzy pole elementów kierunkowych (pole kierunków).

Definicja 5 *Izokliną nazywamy krzywą, na której pochodna ma stałą wartość, tzn. krzywą o równaniu*

$$f(x, y) = a = const, \quad a \in f(D)$$

(zbiór punktów obszaru D, którym odpowiada ta sama wartość współczynnika kierunkowego stycznej).

Zad. 3. Naszkicować pole kierunków równania różniczkowego $\dot{y} = y$. Za jego pomocą naszkicować przybliżony przebieg niektórych rozwiązań. Odgadnąć rozwiązanie ogólne i naszkicować jego wykres dla różnych wartości stałej.

Zad. 4. Narysować niektóre izokliny i za ich pomocą naszkicować przybliżony przebieg niektórych rozwiązań równania:

a) $\dot{y} = y^2 - t$;
b) $\dot{y} = \frac{ty}{t+y}$;
c) $\dot{y} = x + \frac{x}{y}$;
d) $\dot{y} = x^2 - y$;
e) $\dot{y} = -\frac{y}{x}$;
f) $\dot{y} = 2y(3 - y)$;
g) $\dot{y} = t^2 + y^2$.