9. Obraz, jądro i rząd macierzy

Zad. 1. Wyznaczyć rząd i bazy obrazu i jądra macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ -4 & 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}.$$

Zad. 2. Określić rząd i znaleźć bazy obrazu i jądra macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 \\ -4 & -2 & -1 & 16 & -5 \\ 4 & -1 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zad. 3. Dana jest macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 3 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 4 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & -6 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć bazę jądra macierzy A i określić jej rząd.

Zad. 4. Dana jest macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & -7 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczyć bazy przestrzeni $\mathrm{im}A$ oraz $\ker A$. Czy macierz A jest nieosobliwa?

Zad. 5. Wyznaczyć w zależności od $a, b \in \mathbb{R}$ rząd macierzy

$$\begin{bmatrix} b & b & b-a \\ a-b & -b & a \\ a+b & b & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

Zad. 6. Wyznacz, w zależności od $a \in \mathbb{R}$, rząd macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 0 & a & -1 \\ -1 & a & 0 & a \\ 0 & 0 & a & -3 \end{bmatrix}.$$

Zad. 7. Dane są macierze

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 4 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -1 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć bazy podprzestrzeni $\mathrm{im}A + \mathrm{im}B$, $\mathrm{im}A \cap \mathrm{im}B \subset \mathbb{R}^5$ oraz podprzestrzeni $\ker A + \ker B$, $\ker A \cap \ker B \subset \mathbb{R}^4$.

Zad. 8. Załóżmy, że $n \geq 4$ i wektory $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ są liniowo niezależne. Wyznacz bazę jądra macierzy
$$[\vec{x}, \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} - \vec{y}, \vec{y}] \in \mathbb{R}^{n,4}.$$

Zad. 9. Wektory $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^{2015}$ są liniowo niezależne. Wyznaczyć bazy obrazu i jądra macierzy
$$A = [\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} - \vec{y}, \vec{x} + \vec{z}, \vec{x} - \vec{z}, \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}] \in \mathbb{R}^{2015,5}.$$

Zad. 10. W $\mathbb{R}^5$ dana jest podprzestrzeń liniowa V wymiaru 3. W $\mathbb{R}^{6,5}$ rozważmy podzbiór
$$X = \{A \in \mathbb{R}^{6,5} : V \subset \ker A\}.$$
Pokazać, że X jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}^{6,5}$ i znaleźć jej wymiar.

Zad. 11. W $\mathbb{R}^5$ dana jest podprzestrzeń liniowa X wymiaru 3. W $\mathbb{R}^{5,4}$ rozważmy podzbiór
$$V = \{A \in \mathbb{R}^{5,4} : \mathrm{im} A \subset X\}.$$
Pokazać, że V jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}^{5,4}$ i znaleźć jej wymiar.

Zad. 12. Dane są macierze $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ takie, że $AB = 0$. Pokazać, że
$$\mathrm{rank} A + \mathrm{rank} B \leq n.$$

Zad. 13. Niech $A \in \mathbb{K}^{k,l}$, $B \in \mathbb{K}^{l,m}$. Pokazać, że
$$\mathrm{rank}(AB) \leq \min\left(\mathrm{rank} A, \mathrm{rank} B\right).$$

Zad. 14. Dana jest macierz $A \in \mathbb{C}^{2015,2015}$ taka, że
$$\mathrm{rank} A < 1000.$$
Pokazać, że
$$\dim\big(\ker(A + A^T)\big) > 15.$$

Zad. 15. Niech $A, B \in \mathbb{K}^{m,n}$. Pokazać, że
$$\mathrm{rank}(A + B) \leq \mathrm{rank} A + \mathrm{rank} B.$$

Zad. 16. Dana jest macierz $A \in \mathbb{R}^{m,n}$. Pokazać, że $\ker(A^T A)$ oraz
$$\mathrm{rank} A = \mathrm{rank}(A^T A) = \mathrm{rank}(AA^T).$$

Zad. 17. Załóżmy, że $A \in \mathbb{K}^{m,n}$. Pokazać, że

- (a) $\mathbb{K}^n = \ker A \oplus \mathrm{im} A^H$;
- (b) $\mathbb{K}^m = \ker A^H \oplus \mathrm{im} A$.

Zad. 18. Dana jest macierz $B \in \mathbb{K}^{l,m}$ i $\mathrm{rank} B = r$. W przestrzeni $\mathbb{K}^{m,n}$ rozważamy podzbiór
$$X = \{M \in \mathbb{K}^{m,n} : BM = 0\}.$$
Pokazać, że X jest podprzestrzenią liniową i określić jej wymiar.

Zad. 19. Dana jest macierz nieosobliwa $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ i macierze $B, C \in \mathbb{K}^{n,n}$ takie, że $A = BC$. Pokazać, że macierze B i C też są nieosobliwe.

Zad. 20. Pokazać, że rząd macierzy $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ takiej, że $A + A^T = 0$, jest liczbą parzystą.

Zad. 21. Pokazać, że

(a) operacje elementarne na wierszach nie zmieniają jądra macierzy;

(b) operacje elementarne na kolumnach nie zmieniają obrazu macierzy;

(c) operacje elementarne na wierszach i kolumnach nie zmieniają rzędu macierzy.

Zad. 22. W przestrzeni $\mathbb{K}^m$ dane są podprzestrzenie

$$U = \mathrm{span}(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_k), \quad V = \mathrm{span}(\vec{b}_1, ..., \vec{b}_l).$$

i $M = [\vec{a}_1, ..., \vec{a}_k, \vec{b}_1, ..., \vec{b}_l] \in \mathbb{K}^{m,k+l}$.

(a) Pokazać, że $\mathrm{rank} M = \mathrm{rank} U + \mathrm{rank} V$.

(b) Pokazać, że $\dim(\ker M) \geq \dim(U \cap V)$.

(c) Pokazać, że $[\alpha_1, ..., \alpha_k, \beta_1, ..., \beta_l]^T \in \ker M$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \cdots \alpha_k \vec{a}_k = -\left(\beta_1 \vec{b}_1 + \cdots + \beta_l \vec{b}_l\right) \in U \cap V.$$