**Zestaw zadań z Geometrii z algebrą liniową**
**dla kierunku Informatyka, rok akadem. 2015/2016**

---

# 8. Przestrzenie liniowe - sumy podprzestrzeni

Zad. 1. Wyjaśnić pojęcia: baza przestrzeni liniowej, wymiar przestrzeni liniowej, suma podprzestrzeni, suma prosta podprzestrzeni.

Zad. 2. W $\mathbb{R}^3$ wyznaczyć bazy podprzestrzeni $U \cap V$ i $U + V$ dla

$$U = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\},$$

$$V = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}.$$

Zad. 3. W $\mathbb{R}^4$ dane są podprzestrzenie

$$U = \text{span}\left([1, -2, 0, 1]^T, [2, 1, 1, 0]^T, [1, 8, 2, -3]^T\right),$$

$$V = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0\right\}.$$

Wyznaczyć bazy podprzestrzeni $U \cap V$ i $U + V$.

Zad. 4. W przestrzeni liniowej $X$ dane są podprzestrzenie $U, V$. Pokazać, że $U + V = U \cup V$ wtedy i tylk wtedy, gdy $U \subset V$ lub $V \subset U$.

Zad. 5. W $n$-wymiarowej przestrzeni liniowej $X$ dana jest podprzestrzeń $V$ wymiaru $n-1$ i wektor $w \in X$. Pokazać, że $X = V \oplus \text{span}(w)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $w \notin V$.

Zad. 6. W przestrzeni $\mathbb{C}^n$ dane są podprzestrzenie liniowe

$$U = \{\vec{u} \in \mathbb{C}^n : u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 0\},$$

$$V = \{\vec{v} \in \mathbb{C}^n : v_1 = v_2 = \ldots = v_n\}.$$

Pokazać, że $\mathbb{C}^n = U \oplus V$. Dla danego wektora $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ wyznaczyć wektory $\vec{u} \in U$ oraz $\vec{v} \in V$ takie, że $\vec{x} = \vec{v} + \vec{u}$.

Zad. 7. Pokazać, że następujące podzbiory w $\mathbb{R}^{n,n}$ są podprzestrzeniami liniowymi:

$(a)$ $S = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} : \ A = A^T\}$;
$(b)$ $T = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} : \ A = -A^T\}$.

Pokazać, że $\mathbb{R}^{n,n} = S + T$. Czy $\mathbb{R}^{n,n} = S \oplus T$?

Zad. 8. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$ sane są podprzestrzenie

$$U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 + x_2 = x_2 + x_3 = x_3 + x_4 = 0\},$$

$$V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 + x_2 + x_3 = x_2 + x_3 + x_4 = 0\},$$

gdzie $\vec{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$. Znaleźć bazę przestrzeni $U + V$ i uzupełnić ją do bazy całej przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Czy suma $U + V$ jest prosta?

Zad. 9. Zbiór

$$Y = \{p \in \mathbb{R}[x]_4 : \ p(0) = p(1)\}$$

jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}[x]_4$. Znaleźć podprzestrzeń $X \subset \mathbb{R}[x]_4$ taką, że $\mathbb{R}[x]_4 = X \oplus Y$. Wskazać bazy i określić wymiary podprzestrzeni $X$ i $Y$.

Zad. 10. Niech

$$X = \{p \in \mathbb{C}[x]_5 : \; p(0) = p(1) = p(-1)\}.$$

Pokazać, że $X$ jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{C}[x]_5$, znaleźć wymiar i wskazać bazę. Wskazać bazę podprzestrzeni $Y \subset \mathbb{C}[x]_5$ takiej, że $\mathbb{C}[x]_5 = X \oplus Y$.

Zad. 11. Niech $a, b \in \mathbb{R}$. W $\mathbb{R}^3$ dane są podprzestrzenie

$$U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \; x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\},$$

$$V = \operatorname{span}\left([2, a-1, 0]^T, [1, 1, b]^T\right).$$

Zbadać dla jakich wartości $a, b$:

$(a)$ $\mathbb{R}^3 = U + V$;

$(b)$ $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

Zad. 12. W $\mathbb{R}^5$ dana jest podprzestrzeń

$$V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^5 : \; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0\}.$$

Znaleźć bazę $V$ i znaleźć bazę podprzestrzeni $W \subset \mathbb{R}^5$ takiej, że $V \oplus W = \mathbb{R}^5$.

Zad. 13. W $\mathbb{R}^4$ dane są podprzestrzenie

$$X = \operatorname{span}\left([3, 2, 1, 0]^T, [4, 3, 0, 2]^T, [1, 2, 2, -3]^T\right),$$

$$Y = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : \; x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 5x_4 = 0\}.$$

Znaleźć bazy podprzestrzeni:

$(a)$ $X \cap Y$;

$(b)$ $X + Y$.

Zad. 14. W $\mathbb{R}^3$ dane są podprzestrzenie

$$X = \operatorname{span}([1, 2, -2]^T, [3, 2, 1]^T),$$

$$Y = \operatorname{span}([1, -2, 3]^T, [4, 0, 2]^T).$$

Znaleźć bazy podprzestrzeni

$(a)$ $X \cap Y$;

$(b)$ $X + Y$.

Zad. 15. W $\mathbb{R}^4$ dane są podprzestrzenie

$$X = \operatorname{span}\left([2, 1, 3, 4]^T, [3, 9, 3, 9]^T, [-1, 7, -3, 1]^T\right),$$

$$Y = \operatorname{span}\left([1, -3, 3, 0]^T, [2, 5, 3, 5]^T, [1, 8, 0, 5]^T\right).$$

Znaleźć bazy podprzestrzeni:

$(a)$ $X \cap Y$;

$(b)$ $X + Y$.

Zad. 16. W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ dane są wektory

$$\vec{x} = [1, 2, -3, -1]^T, \quad \vec{y} = [2, -2, 5, 2]^T, \quad \vec{z} = [-1, 10, a, -7]^T,$$

gdzie $a \in \mathbb{R}$. Zbadać, dla jakich wartości $a$ suma $\operatorname{span}(\vec{x}, \vec{y}) + \operatorname{span}(\vec{z})$ jest prosta.

Zad. 17. W $\mathbb{R}^4$ dane są podprzestrzenie

$$X = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : \ -x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 2x_1 - 4x_2 + 10x_3 - 6x_4 = 0\},$$

$$Y = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : \ 2x_1 + x_2 - x_3 + 4_4 = 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0\}.$$

Znaleźć bazy podprzestrzeni:

(a) $X \cap Y$;

(b) $X + Y$.

Zad. 18. Dla jakiego parametru $t \in \mathbb{R}$ określamy podprzestrzenie w $\mathbb{R}^4$

$$X = \operatorname{span}\{[1, 2, t, t^2]^T, [1, 0, t, -t^2]^T\},$$

$$Y = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + tx_3 = x_4 = 0\}.$$

Dla jakich $t$ suma $X + Y$ jest prosta?

Zad. 19. W przestrzeni $\mathbb{R}^{2,2}$ dana jest podprzestrzeń liniowa

$$X = \{A \in \mathbb{R}^{2,2} : [1, 1]A = [0, 0]\}.$$

Określić $\dim X$ i znaleźć bazę podprzestrzeni $Y \subset \mathbb{R}^{2,2}$ takiej, że

$$X \oplus Y = \mathbb{R}^{2,2}.$$

Zad. 20. W przestrzeni $\mathbb{R}^5$ rozważmy podprzestrzenie

$$U = \operatorname{span}\left([3, 1, -3, 1, -1]^T, [1, 2, 0, -3, 4]^T, [1, 1, 2, 0, -1]^T, [8, 3, 0, 5, -9]^T\right),$$

$$V = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^5 : x_1 - 2x_2 - x_4 = 2x_2 + x_3 - x_5 = 0\right\}.$$

Wyznaczyć bazy podprzestrzeni $U + V$ i $U \cap V$.

Zad. 21. Niech $X$ będzie przestrzenią liniową wymiaru $n < \infty$ oraz niech $V \subset X$ będzie podprzestrzenią liniową. Pokazać, że istnieje podprzestrzeń $W \subset X$ taka, że $X = V \oplus W$.

Zad. 22. Przestrzeń liniowa $X$ ma wymiar 10, $U, V \subset X$ są podprzestrzeniami liniowymi i $\dim U = 4$, $\dim V = 6$. Jakie są możliwe wymiary podprzestrzeni $U \cap V$ i $U + V$?

Zad. 23. Pokazać, że przestrzeń funkcji $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ jest sumą prostą podprzestrzeni funkcji parzystych i funkcji nieparzystych.