Zestaw zadań z Geometrii z algebrą liniową
dla kierunku Informatyka, rok akadem. 2015/2016

---

7. Przestrzenie liniowe - kontynuacja

Zad. 1. Wyjaśnić pojęcia: baza przestrzeni liniowej, wymiar przestrzeni liniowej.

Zad. 2. Pokazać, że układ wektorów

$$\vec{v}_1 = [1, -1]^T, \vec{v}_2 = [1, 1]^T$$

jest bazą w $\mathbb{R}^2$. Znaleźć $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ takie, że

$$[-1, 3] = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2.$$

Zad. 3. Pokazać, że układ wielomianów

$$p_1(x) = 1 + x, \quad p_2(x) = 1 + x^2, \quad p_3(x) = 2x$$

jest bazą w $\mathbb{R}[x]_2$. Znaleźć $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ takie, że

$$x^2 = \alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) + \alpha_3 p_3(x).$$

Zad. 4. Sprawdzić z definicji, czy podane zbiory wektorów są bazami wskazanych przestrzeni liniowych:

(a) $B = \{(2, 5), (3, 1), (6, -7)\}$, $\mathbb{R}^2$;
(b) $B = \{(2, 3, -1), (1, -3, 2)\}$, $\mathbb{R}^3$;
(c) $B = \{(1, -1, 4), (3, 0, 1), (2, 1, -2)\}$, $\mathbb{R}^3$;
(c) $B = \{2x + 4, 3x - x^2, -2x^2 + 4x - 4\}$, $\mathbb{R}[x]_2$.

Zad. 5. Wektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ tworzą bazę przestrzeni liniowej V. Zbadać z definicji, czy podane zbiory wektorów też są bazami przestrzeni V:

(a) $\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$, $3\vec{u} + \vec{w}$, $\vec{u} + 4\vec{v} - \vec{w}$;
(b) $\vec{u}$, $2\vec{u} + \vec{v}$, $3\vec{u} - \vec{v} + 4\vec{w}$.

Zad. 6. Załóżmy, że $x_1, ..., x_k \in X$. Pokazać, że następujące warunki są równoważne:

(i) układ $x_1, ..., x_k$ jest bazą przestrzeni X,
(ii) układ $x_1, ..., x_k$ jest maksymalnym (w sensie inkluzji) układem liniowo niezależnym w przestrzeni X,
(iii) układ $x_1, ..., x_k$ jest minimalnym (w sensie inkluzji) układem rozpinającym przestrzeń X.

Zad. 7. Wskazać bazy i określić wymiary podanych przestrzeni liniowych:

(a) $V = \{(x + y + z, x - y, x - z, y - z) : \ x, y, z \in \mathbb{R}\}$;
(b) $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \ 2x - y = z - t = 0\}$.

Zad. 8. W $\mathbb{R}^5$ dany jest podzbiór

$$W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^5 : \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 0\}.$$

Pokazać, że W jest przestrzenią liniową. Wskazać bazę i określić wymiar W.

Zad. 9. W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ dana jest podprzestrzeń

$$V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 - 2x_2 = 3x_3 - x_4,\ x_2 + x_3 = -x_4\}.$$

Znaleźć bazę podprzestrzeni V i dopełnić ją do bazy przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

Zad. 10. Niech $X \subset \mathbb{R}^\infty$ będzie zbiorem wszystkich ciągów $(x_n)_{n=1}^\infty$ takich, że dla pewnej stałej $C < \infty$ i dla każdego $n = 1, 2, \ldots$ zachodzi oszacowanie

$$x_n < C.$$

Pokazać, że X jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}^\infty$ i $\dim X = \infty$.

Zad. 11. W przestrzeni $\mathbb{R}^{2,2}$ razważamy podzbiór

$$U = \left\{ M \in \mathbb{R}^{2,2} :\ [2, -1]M \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = 0 \right\}.$$

Pokazać, że U jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}^{2,2}$. Wyznaczyć $\dim U$ i wskazać bazę tej przestrzeni.

Zad. 12. W przestrzeni $\mathbb{R}^{2,3}$ rozważamy podzbiór

$$X = \{A \in \mathbb{R}^{2,3} : A \cdot [1, -1, 2]^T = 0\}.$$

Pokazać, że X jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}^{2,3}$, wskazać jej bazę i określić wymiar.

Zad. 13. Zbiór

$$Y = \{p \in \mathbb{R}[x]_4 :\ p(0) = p(1),\ p(-1) = 0\}$$

jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}[x]_4$. Określić wymiar i wskazać bazę tej przestrzeni.

Zad. 14. Wektory $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są bazą pewnej przestrzeni liniowej X nad ciałem $\mathbb{K}$. Pokazać, że układ

$$b_k = \sum_{j=1}^{k} a_j, \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

też jest bazą X.

Zad. 15. W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ dane są wektory

$$\vec{u} = [1, 1, 1, 1]^T, \quad \vec{v} = [1, 1, -1, -1]^T, \quad \vec{w} = [-1, 1, 1, -1]^T.$$

Pokazać, że układ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ jest liniowo niezależny. Znaleźć wektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ taki, że układ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}$ jest bazą w $\mathbb{R}^4$.

Zad. 16. W przestrzeni $\mathbb{R}[t]_3$ wielomianów o współczynnikach rzeczywistych stopnia co najwyżej 3 dany jest podzbiór

$$Z = \{p \in \mathbb{R}[t]_3 :\ p(-1) + p(1) = 2p(0)\}.$$

Pokazać, że Z jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}[t]_3$, określić jej wymiar i znaleźć jej bazę.

Zad. 17. Dane są wielomiany $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{K}[x]$, przy czym każdy z nich jest innego stopnia. Pokazać, że układ $p_1, \ldots, p_k$ jest liniowo niezależny.

Zad. 18. Niech $a \in \mathbb{K}$. Pokazać, że nieskończony układ wielomianów

$$q_0(x) = 1, \quad q_k(x) = (x-a)^k, \text{ dla } k = 1, 2, 3, ...$$

jest bazą przestrzeni $\mathbb{K}[x]$.

Zad. 19. Pokazać, że układ ciągów

$$e_k = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ...),$$

gdzie 1 jest na k-tym miejscu, jest liniowo niezależny w $\mathbb{R}^\infty$, ale nie jest on bazą.

Zad. 20. Pokazać, że zbiór wszystkich ciągów arytmetycznych o wyrazach w $\mathbb{K}$ jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{K}^\infty$. Jaki jest jej wymiar? Wskazać bazę.

Zad. 21. Dane są macierze

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^{2,3}$ rozważamy podzbiór

$$Z = \left\{ M \in \mathbb{R}^{2,3} : \; AMB^T = BM^T \right\}.$$

Pokazać, że Z jest podprzestrzenią liniową, określić jej wymiar i znaleźć bazę.

Zad. 22. Pokazać, że zbiór $V = \{A \in \mathbb{K}^{n,n} : A = A^T\}$ jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{K}^{n,n}$. Wskazać bazę i określić wymiar.

Zad. 23. Wektory $x_1, x_2, ..., x_n$ są bazą pewnej przestrzeni liniowej X nad ciałem $\mathbb{K}$. Czy wektory

$$x_1, x_1 + x_2, ..., x_{n-1} + x_n$$

też są bazą przestrzeni X?

Zad. 24. Niech X oznacza zbiór wszystkich ciągów rzeczywistych $(x_n)_{n=0}^\infty$ spełniających zależność rekurencyjną

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

- (a) Pokazać, że X jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$, znaleźć jej wymiar i bazę.
- (b) Pokazać, że X posiada bazę złożoną z ciągów geometrycznych.
- (c) Znaleźć jawny wzór na n-ty wyraz ciągu $(x_n)_{n=0}^\infty$ z przestrzeni X takiego, że $x_0 = 0$, $x_1 = 1$.

Zad. 25. Czy zbiór $W = \{A \in \mathbb{C}^{n,n} : A = A^H\}$ jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{C}$? Czy W jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$? Jeśli tak, to określić jej wymiar.

Zad. 26. Dane są parami różne liczby zespolone $x_0, x_1, ..., x_n$ i

$$l_k(z) = \prod_{\substack{0 \le j \le n \\ j \ne k}} \frac{z - x_k}{x_j - x_k}.$$

Pokazać, że układ $l_0, ..., l_n$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{C}[z]_n$. Dla $k = 0, 1, ..., n$ znaleźć współczynniki $a_{0,k}, ..., a_{n,k} \in \mathbb{C}$ takie, że

$$z^k = \sum_{j=0}^{n} a_{k,j} l_k(z).$$

Zad. 27. W przestrzeni $\mathbb{K}^n$ dana jest baza złożona z wektorów $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n$. Pokazać, że układ macierzy $\vec{v}_k \cdot \vec{v}_l^T$, $k, l = 1, 2, ..., n$ jest bazą brzestrzeni $\mathbb{K}^{n,n}$. Jaki układ macierzy otrzymamy, gdy $\vec{v}_k = \vec{e}_k$?