6. Przestrzenie liniowe

Zad. 1. Wyjaśnić pojęcia: przestrzeń liniowa nad ciałem $\mathbb{K}$, podprzestrzeń liniowa, kombinacja liniowa wektorów, podprzestrzeń rozpięta, wektory liniowo niezależne i zależne.

Zad. 2. Pokazać, że zbiór $\mathbb{R}[x]_n$ z dodawaniem wielomianów i mnożeniem ich przez liczby rzeczywiste jest przestrzenią liniową.

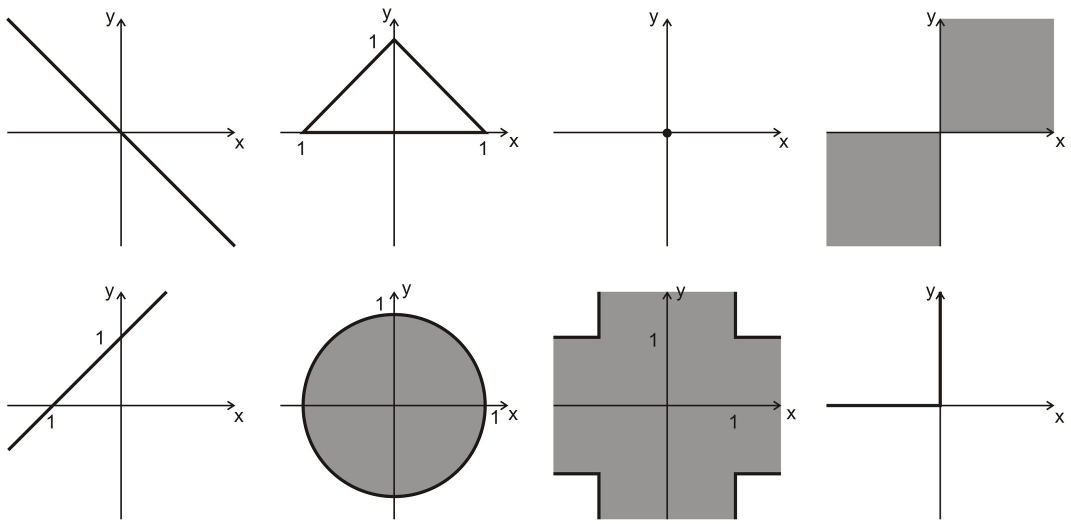
Zad. 3. Pokazać, że ciało $\mathbb{C}$ jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$.

Zad. 4. Pokazać, że zbiór

$$A = \{p \in \mathbb{R}[x]_3 : \ p(x) = p(-x)\}$$

jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}[x]$.

Zad. 5. Króty z narysowanych zbiorów jest podprzestrzenią liniową płaszczyzny?



Zad. 6. Pokazać, że zbiór

(a) $A = \{(x, y, z) : \ yz \leq 0\}$ nie jest podprzestrzenią liniową $\mathbb{R}^3$;

(b) $B = \{(2x, x + y, 0, 1) : \ x, y \in \mathbb{R}\}$ nie jest podprzestrzenią liniową $\mathbb{R}^4$.

Zad. 7. W przestrzeni ciągów rzeczywistych $\mathbb{R}^\infty$ rozważamy podzbiór

$$B = \{(x_n)_n : \ \text{istnieje } K \in (0, \infty) \text{ t. że dla każdego } n \in \mathbb{N} \ \ |x_n| \leq K n^{-1}\}.$$

Pokazać, że zbiór B jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}^\infty$.

Zad. 8. Czy jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}^2$:

(a) zbiór wszystkich wektorów $[x, y]^T$ takich, że $x + y = 1$;

(b) zbiór wszystkich wektorów $[x, y]^T$ takich, że $x + y = 0$;

(c) zbiór wszystkich wektorów $[x, y]^T$ takich, że $x \geq 0$, $y \geq 0$;

(d) zbiór wszystkich wektorów $[1, y]^T$ takich, że $y \in \mathbb{R}$;

(e) zbiór wszystkich wektorów $[0, y]^T$ takich, że $y \in \mathbb{R}$?

Zad. 9. Które z podzbiorów macierzy w $\mathbb{C}^{n,n}$ są przestrzeniami liniowymi:

(a) $\{A = [a_{ij}] : \sum_{i,j} a_{ij} = 0\}$;

(b) $\{A : A = A^T\}$;

(c) $\{A : A = A^H\}$;

(d) wszystkie macierze A takie, że $A\vec{x} = 0$ dla pewnego ustalonego wektora $x \in \mathbb{C}^n$?

Zad. 10. Które podzbiory są podprzestrzeniami liniowymi w $\mathbb{R}^\infty$:

(a) zbiór wszystkich ciągów stałych;

(b) zbiór wszystkich ciągów rosnących;

(c) zbiór wszystkich ciągów geometrycznych;

(d) zbiór wszystkich ciągów arytmetycznych;

(e) zbiór wszystkich ciągów (x_n) takich, że $|x_n| \le 2015$ dla każdego n;

(f) zbiór wszystkich ciągów (x_n) takich, że istnieje stała $C > 0$ taka, że dla każdego n zachodzi $|x_n| \le C^{-n}$;

(g) zbiór wszystkich ciągów (x_n) takich, że $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ dla każdego n.

Zad. 11. Pokazać, że ciało $\mathbb{C}$ jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$, wektory 1 oraz i są liniowo niezależne, natomiast dowolny układ trzech wektorów z $\mathbb{C}$ musi być liniowo zależny.

Zad. 12. Zbadać, czy podane układy wektorów w $\mathbb{R}^3$ są liniowo niezależne:

(a) $[1, 2, 3]^T$, $[2, 5, 7]^T$, $[3, 7, 2]^T$;

(b) $[1, -2, 5]^T$, $[2, -1, 4]^T$, $[-5, 1, 7]^T$.

Zad. 13. Zbadać, czy układ wektorów w $\mathbb{R}^4$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

jest liniowo niezależny.

Zad. 14. Czy wielomian $x^4 + 1$ jest kombinacją liniową wielomianów

$$x^4 - 1, \quad x^4 - x^2, \quad x^2 - 1, \quad x^2 + x - 2?$$

Zad. 15. Sprawdzić liniową niezależność układu wielomianów

$$p_1(t) = 1 - t^2, \quad p_2(t) = 1 + t^3, \quad p_3(t) = 1 - t^3, \quad p_4(t) = 1 + t + t^2 + t^3.$$

Zad. 16. Zbadać, dla jakich $a, b \in \mathbb{R}$ wektor

$$\begin{bmatrix} 1 + a \\ a \\ b \end{bmatrix}$$

jest kombinacją liniową wektorów $[1, -1, 0]^T$, $[-2, 1, 1]^T$.

Zad. 17. Sprawdzić dla jakich wartości $a, b \in \mathbb{R}$ wektory

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2+a \\ 3a \\ a+b \end{bmatrix}$$

są liniowo niezależne.

Zad. 18. Sprawdzić dla jakich wartości $a \in \mathbb{R}$ wektory

$$\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ -a \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 2a \\ a+1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ a^2 \\ -a^2 \end{bmatrix}$$

są liniowo niezależne.

Zad. 19. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ wektory

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ a \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

są liniowo niezależne?

Zad. 20. Dla jakich liczb zespolonych z wektory

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2+z^2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1+z^4 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

są liniowo niezależne?

Zad. 21. Niech $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Pokazać, że macierze A i A^T są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy $A = A^T$.

Zad. 22. W przestrzeni liniowej X nad ciałem $\mathbb{C}$ dane są liniowo niezależne wektory $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$. Dla jakich $a, b, c \in \mathbb{C}$ układ wektorów

$$a\vec{x} - b\vec{y}, \quad c\vec{y} - a\vec{z}, \quad b\vec{z} - c\vec{x}$$

jest liniowo niezależny?

Zad. 23. Niech V będzie przestrzenią liniową, a $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}$ wektorami z tej przestrzeni. Uzasadnić, że jeżeli wektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}$ są liniowo niezależne, to wektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ też.

Zad. 24. Zbiór wszystkich funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tworzy przestrzeń liniową nad $\mathbb{R}$. Pokazać, że funkcje

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = \sin x, \quad f_3(x) = \cos x$$

są liniowo niezależne.

Zad. 25. Układ wektorów $x_1, ..., x_k$ z przestrzeni liniowej X jest liniowo niezależny. Pokazać, że dowolny podukład tego układu też jest liniowo niezależny.

Zad. 26. Układ wektorów $x_1, ..., x_k$ z przestrzeni liniowej X zawiera podukład liniowo zależny. Pokazać, że układ wektorów $x_1, ..., x_k$ też jest liniowo zależny.

Zad. 27. Układ wektorów $x_1, ..., x_k$ z przestrzeni liniowej X jest liniowo niezależny. Zbadać, czy układ wektorów $x_1, x_2 + x_1, x_3 + x_1, ..., x_k + x_1$ też jest liniowo niezależny.

Zad. 28. W $\mathbb{R}^5$ dany jest podzbiór

$$V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^5 : \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0\}.$$

Pokazać, że V jest podprzestrzenią liniową i znaleźć układ liniowo niezależnych wektorów rozpinających V. Z ilu wektorów może składaś się taki układ?

Zad. 29. Pokazać, że zbiór

$$Y = \{p \in \mathbb{R}[x]_4 : \ p(0) = p(1), \ p(-1) = 0\}$$

jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}[x]_4$. Znaleźć wielomiany $p_1, ..., p_k \in \mathbb{R}[x]_4$ takie, że

$$Y = \mathrm{span}(p_1, ..., p_k).$$

Czy znalezione wielomiany są liniowo niezależne?

Zad. 30. Pokazać, że zbiór

$$Y = \{p \in \mathbb{R}[x]_4 : \ 2p(0) = p(1) = p(-1)\}$$

jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}[x]_4$. Znaleźć liniowo niezależny układ wielomianów $p_1, ..., p_k \in \mathbb{R}[x]_4$ taki, że

$$Y = \mathrm{span}(p_1, ..., p_k).$$

Zad. 31. Pokazać, że dla każdego n układ funkcji $f_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, ..., n$, jest liniowo niezależny w $\mathbb{C}[x]$ (lub $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$). Następnie udowodnić to samo dla przestrzeni $\mathbb{R}[x]$ i $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Zad. 32. Pokazać, że

$$\mathbb{R}^{n,n} = \mathrm{TRIU}^{n,n}(\mathbb{R}) + \mathrm{TRIL}^{n,n}(\mathbb{R}).$$

Ile stopni swobody jest w przedstawieniu $A = U + L$ dla $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $U \in \mathrm{TRIU}^{n,n}(\mathbb{R})$, $L \in \mathrm{TRIL}^{n,n}(\mathbb{R})$?