Zestaw zadań z Geometrii z algebrą liniową
dla kierunku Informatyka, rok akadem. 2015/2016

---

4. Macierze

Zad. 1. Wyjaśnić pojęcia: macierz zerowa, macierz kwadratowa, macierz trójkątna dolna i górna, macierz diagonalna, macierz jednostkowa, macierz transponowana, hermitowskie sprzężenie macierzy.

Zad. 2. Dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}:$$

(a) obliczyć $5(A + 2B) + 4(2A - B)$;

(b) rozwiązać równanie $3(A + X) + 5(3X + B) = A - B$.

Zad. 3. Obliczyć:

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} i & 1+2i \\ -3 & 2-3i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -i \\ 5+i & 4-3i \end{bmatrix}$.

Zad. 4. Obliczyć

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jaki z tego wniosek?

Zad. 5. Znaleźć rowzwiązanie równania macierzowego

$$X \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X.$$

Zad. 6. Dana jest macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1-2i & 1+i & -i \\ -3 & i & 2i \\ i-1 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczyć:

(a) A^T;

(b) A^H.

Zad.7. Niech $A = [1, -1, 2, 3]$, $B = [2, -1, 4, -2]$. Obliczyć:

(a) AB^T;

(b) $A^T B$.

Zad. 8. Liczbie zespolonej $z = a + bi$ przyporządkowujemy macierz

$$A_z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}.$$

Pokazać, że:

(a) $A_{\overline{z}} = A_z^T$;

(b) $A_z A_w = A_{zw}$;

(c) $(A_z)^{-1} = A_{z^{-1}}$.

Zad. 9. Podać przykład niezerowej macierzy $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n > 1$, takiej, że $A^2 = 0$.

Zad. 10. Udowodnić, że każda macierz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ spełnia równość

$$A^2 = (a + d)A - (ad - bc)I.$$

Zad. 11. Sprawdzić, że

$$\left(A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \wedge \ ad - bc \neq 0\right) \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Czy A^{-1} istnieje przy $ad - bc = 0$?

Zad. 12. Niech $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$. Wyznaz macierze:

(a) $$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}^k;$$

(b) $$\begin{bmatrix} 0 & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & 0 \end{bmatrix}^k.$$

Zad. 13. Niech $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ to ciąg Fibonacciego, tzn.

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \ \text{ dla } \ n = 0, 1, \ldots.$$

Niech

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Obliczyć F^k dla $k = 2, 3, 4, 5$. Jaki jest związek między elementami macierzy F^n i wyrazami ciągu Fibonacciego dla dowolnego $n \geq 1$? Sformułować hipotezę i udowodnić ją.

Zad. 14. Śladem macierzy kwadratowej $A = [a_{j,k}] \in \mathbb{K}^{n,n}$ nazywamy sumę jej elementów na głównej przekątnej, tzn. skalar zdefiniowany wzorem

$$\text{trace}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{j,j}.$$

Udowodnij, że dla dowolnych macierzy $A, B \in \mathbb{K}^{m,n}$ macierze AB^T i $A^T B$ są kwadratowe oraz $\text{trace}(AB^T) = \text{trace}(A^T B)$.

Zad. 15. Macierz $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ jest diagonalna i wszystkie jej elementy na głównej przekątnej są różne. Macierz $B \in \mathbb{K}^{n,n}$ jest taką macierzą, że $BA = AB$. Pokazać, że macierz B też jest diagonalna.

Zad. 16. Macierz $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ ma dwa identyczne wiersze (kolumny). Pokazać, że A jest osobliwa.

Zad. 17. Znajdź macierze z $\mathbb{R}^{2,2}$ odpowiadające:

(a) symetrii względen osi Oy;

(b) symetrii względem prostej $x = y$;

(c) symetrii względem początku układu współrzędnych;

(d) jednokładności o skali λ.

Zad. 18. Dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{m,n}, \qquad \text{gdzie } w_i \in \mathbb{K}^{1,n}$$

rozważamy następujące przekształcenia:

(a) zamiana miejscami dwóch wierszy: $w_j \leftrightarrow w_k$;

(b) pomnożenie wiersza przez niezerowy skalar: $w_j \to \alpha w_j$, $\alpha \in \mathbb{K}$;

(c) dodanie do pewnego wiersza innego wiersza pomnożonego przez skalar: $w_j \to w_j + \beta w_k$.

Pokazać, że każdą z powyższych operacji można wykonać mnożąc macierz A z lewej strony przez pewną nieosobliwą macierz z $\mathbb{K}^{m,m}$. Wyznaczyć te macierze.

Zad. 19. Pokazać, że następujące warunki są równoważne:

(i) A jest nieosobliwa;

(ii) A^T jest nieosobliwa;

(iii) A^H jest nieosobliwa.

Zad. 20. Niech $n = 1, 2, 3, \ldots$ oraz

$$F = \left[e^{i\frac{2\pi kl}{n}} \right]_{k,l=0}^{n-1} \in \mathbb{C}^{n,n}.$$

Wyznaczyć macierze:

(a) $F^H F$;

(b) F^{-1}.

Zad. 21. Dla $\theta \in \mathbb{R}$ wyznaczyć macierz $C_\theta \in \mathbb{R}^{2,2}$ taką, że odwzorowanie

$$\mathbb{R}^2 \ni \vec{x} \mapsto C_\theta \vec{x}$$

jest symetrią względem prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych i nachylonej do osi Ox pod kątem θ.

Zad. 22. Pokazać, że istnieją macierze nieosobliwe $C, D \in \mathbb{K}^{n,n}$ takie, że dla dowolnej macierzy $A \in \mathrm{TRIU}^{n,n}$ zachodzi $CAD \in \mathrm{TRIL}^{n,n}$.

Zad. 23. Niech σ, τ będą dwiema permutacjami zbioru $\{1, 2, ..., m\}$. Pokazać, że:

(a) $P_{\sigma^{-1}} = P_\sigma^{-1} = P_\sigma^T$;

(b) $P_{\sigma \circ \tau} = P_\sigma P_\tau$.

Zad. 24. Wyznaczyć macierze odwrotne do macierzy:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Zad. 25. Wyznaczyć macierze (k=1,2,...):

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & 0 & \\ & & 0 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}^k$;

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & 0 & \\ & & 0 & \ddots & & \\ 0 & & & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & & & 0 & 1 \\ 1 & & 0 & & & 0 \end{bmatrix}^k$.

Zad. 26. Niech $\alpha \in \mathbb{C}$ i $G(\alpha) \in \mathbb{C}^{n,n}$ jest to podzbiór składający się z macierzy, dla których suma elementów w każdym wierszu jest równa α. Zbadać, dla jakich α zachodzi implikacja

$$A, B \in G(\alpha) \Longrightarrow AB \in G(\alpha).$$

Zad. 27. Pokazać, że macierz trójkatna górna (dolna) jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej elementy na przekatnej są różne od zera.

Zad. 28. Niech σ będzie permutacją zbioru $\{1, 2, ..., m\}$. Wyznaczyć macierz P_σ taką, że dla każdego wektora $\vec{x} = [x_1, ..., x_m]^T \in \mathbb{K}^m$

$$P_\sigma \vec{x} = [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(m)}]^T.$$

Zad. 29. Danse są dwie macierze $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ takie, że $AB = BA$. Pokazać, że

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) A^k B^{n-k}.$$

Czy powyzszy wzór jest prawdziwy bez założenia $AB = BA$?

Zad. 30. Niech $\lambda \in \mathbb{K}$, $k = 1, 2, ...$ Obliczyć A^k dla

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n,n}.$$

Zad. 31. Wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy trójkatnej górnej $[a_{i,j}]_{i,j} \in \mathbb{R}^{n,n}$ takiej, że $a_{i,j}$ =1 dla wszystkich $i \leq j$.

Zad. 32. Macierz kwadratową $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ nazywamy prawą (lewą) macierzą stochastyczną, gdy wszystkie jej elementy są nieujemne i suma elementów w każdym wierszu (w każdej kolumnie) jest równa 1. Udowodnić, że iloczyn macierzy prawych (lewych) stochastycznych też jest macierzą prawą (lewą) stochastyczną.

Zad. 33. Pokazać, że macierz $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego wektora $\vec{b}$ układ równań $A\vec{x} = \vec{b}$ ma dokładnie jedno rozwiazanie $\vec{x}$.