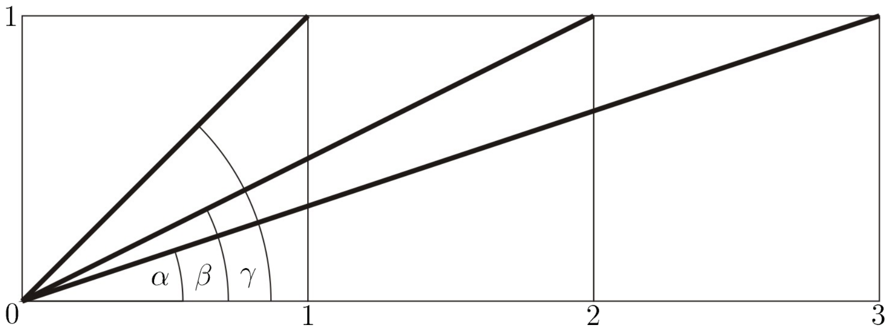
Zestaw zadań z Geometrii z algebrą liniową
dla kierunku Informatyka, rok akadem. 2015/2016

3. Liczby zespolone - kontynuacja

Zad. 1. Obliczyć sumę kątów $\alpha + \beta + \gamma$ na rysunku poniżej.



Zad. 2. Narysować zbiory liczb zespolonych spełniających warunki:

(a) $|2iz + 6| \leq 4$;

(b) $2 < |z + 2 - i| \leq 3$;

(c) $\left|\frac{z-3}{z-3i}\right| > 1$;

(d) $3|z - 1| \leq |z^2 - 1| < 6|z + 1|$;

(e) $\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \pi$;

(f) $|\pi - \arg(z + 1)| \geq \frac{3\pi}{4}$.

Zad. 3 Niech $z \neq 0$ będzie dowolną liczbą zespoloną. Pokazać, że:

(a) $\arg(\overline{z}) = 2\pi - \arg z$, gdy $\arg z \neq 0$;

(b) $\arg(-z) = \begin{cases} \arg z + \pi, & \text{gdy} \quad 0 \leq \arg z < \pi, \\ \arg z - \pi, & \text{gdy} \quad \pi \leq \arg z < 2\pi; \end{cases}$

(c) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = 2\pi - \arg z$, gdy $\arg z \neq 0$.

Korzystając z tych wzorów narysować zbiory liczb zespolonych z spełniających warunki:

(d) $\arg(-z) = \frac{2\pi}{3}$;

(e) $\arg\left(\frac{1}{z+i}\right) < \pi$;

(f) $\frac{\pi}{4} < \arg(\overline{z}) \leq \frac{3\pi}{4}$.

Zad. 4. Podane liczby zapisać w postaci trygonometrycznej:

(a) $z = -1$;

(b) $z = 1 + i$;

(c) $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Zad. 5. Obliczyć:

(a) $(1 + i)^{10}$;

(b) $(\sqrt{2}i - \sqrt{2})^{44}$.

Zad. 6. Przedstawić liczbę
$$\frac{(\sqrt{3}+3i)^{40}}{(\sqrt{3}+i)^{20}}$$
w postaci trygonometrycznej.

Zad. 7. Zapisać liczbę
$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^{25}$$
w postaci algebraicznej.

Zad. 8. Wyrazić $\cos 5\theta$ i $\sin 5\theta$ przez $\cos\theta$ i $\sin\theta$.

Zad. 9. Pokazać, że dla $z = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ zachodzą wzory:

(a) $z^{-1} = |z|^{-1}\,(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$;

(b) $\overline{z} = |z|\,(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$.

Korzystając z tych wzorów i ze wzoru Moivre'a znaleźć zbiory liczb zespolonych z spełniających warunki:

(c) $z^2 = (\overline{z})^2$;

(d) $\overline{z}\cdot z^4 = \frac{1}{z}$.

Zad. 10. Obliczyć z definicji pierwiastki:

(a) $\sqrt{-7+24i}$;

(b) $\sqrt[3]{1+5i}$.

Zad. 11. Obliczyć i narysować pierwiastki:

(a) $\sqrt[3]{8i}$;

(b) $\sqrt[4]{-1}$;

(c) $\sqrt[8]{1}$;

(d) $\sqrt[4]{1+i}$.

Zad. 12. Rozwiązać w liczbach zespolonych równania:

(a) $z^2 + 4iz - 3 = 0$;

(b) $z^2 + 3z + 3 - i = 0$;

(c) $z^2 + (3i-1)z + 1 + 5i = 0$;

(d) $z^4 - 4i\sqrt{3}z^2 - 16 = 0$;

(e) $z^2 - (6+i)z + 11 - 7i = 0$.

Zad. 13. Rozłożyć na czynniki rzeczywiste i zespolone możliwie niskiego stopnia wielomian:

(a) $z^4 + z^2 + 1$;

(b) $z^3 + 8$.

Zad. 14. Niech $z \in \mathbb{C}$. Zbadać, dla jakich $n \in \{1, 2, ...\}$ liczba $(z + i\overline{z})^n$ jest rzeczywista.

Zad. 15. Obliczyć sumę
$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin(nx).$$

Zad. 16. Niech $n \in \mathbb{N}$. Znaleźć wszystkie liczby zespolone z, dla których

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = 1.$$

Zad. 17. Stosując postać wykładniczą liczby zespolonej z rozwiązać równania:

(a) $z^7 = \overline{z}$;

(b) $(\overline{z})^2|z^2| = \frac{4}{z^2}$.

Zad. 18. Wyznaczyć wszystkie liczby zespolone z, będące rozwiązaniem równania

$$\overline{z}^2 z^6 = 256.$$

Zad. 19. Rozwiązać równanie

$$(z-i)^4 = (iz+3)^4.$$

Zad. 20. Rozstrzygnąć, dla jakich liczb całkowitych n równanie

$$|z - (1+i)^n| = z$$

ma rozwiązanie w dziedzinie zespolonej.

Zad. 21. Liczby z_1 i z_2 są różnymi zespolonymi rozwiązaniami równania

$$z^2 - (1+2i)z - 1 + 3i = 0.$$

Wyznaczyć część rzeczywistą i urojoną liczby

$$\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)^{2015}.$$

Zad. 22. Wykazać, że dla każdego parametru rzeczywistego $a \neq 0$ równanie

$$z^2 + a|z| + a^2 = 0$$

ma dwa różne, wzajemnie sprzężone pierwiastki zespolone.

Zad. 23. Załóżmy, że p jest wielomianem o współczynnikach rzeczywistych i liczba z jest jego pierwiastkiem zespolonym. Pokazać, że $p(\overline{z}) = 0$.

Zad. 24. Niech $z_0, z_1, ..., z_{n-1}$ to wszystkie zespolone pierwiastki z jedności stopnia n. Obliczyć $z_0 + z_1 + \cdots + z_{n-1}$ oraz $z_0 z_1 \ldots z_{n-1}$.

Zad. 25. Niech $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ i $u_0, u_1, ..., u_n$ oznaczają wszystkie zespolone pierwiastki z jedności stopnia $n+1$. Dla $k \in \mathbb{N}$ obliczyć sumę $u_0^k + u_1^k + \cdots + u_n^k$.

Zad. 26. Wyznaczyć wszystkie liczby zespolone z takie, że liczba $z^5 \cdot (\overline{z})^{-3}$ jest rzeczywista.

Zad. 27. Wyznaczyć wszystkie zespolone rozwiązania z równania

$$(z+i)^4 = \frac{|z|^8}{81}.$$

Zad. 28. Czy istnieje liczba naturalna n taka, że część urojona liczby

$$\left(\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{1 - i\sqrt{3}}\right)^n$$

wynosi 0? Jeżeli tak, to wyznaczyć najmniejsze takie n.

Zad. 29. Dane są dwie liczby zespolone $x = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ oraz $y = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$ Czy jest prawdą, że:

(a) $2^{2015} \cdot |x^{-2015} \cdot \overline{y}| = 1$;

(b) dla pewnego $\in \mathbb{N}$ zachodzi $\mathrm{Re}((xy)^k) = 0$;

(c) dla pewnego $\in \mathbb{N}$ zachodzi $\mathrm{Re}(x^k) = 0$.

Zad. 30. Niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Znaleźć postać trygonometryczną liczb

$$\cos\alpha - i\sin\alpha, \qquad \sin\alpha + i\cos\alpha.$$

Zad. 31. Środkiem ciężkości pewnego trójkąta równobocznego na płaszczyźnie zespolonej jest liczba $1+i$. Jeden z wierzchołków tego trójkąta znajduje się w punkcie 0. Wyznaczyć liczby zespolone odpowiadające pozostałym wierzchołkom tego trójkąta.

Zad. 32. Załóżmy, że $|z_1| = |z_2| = |z_3|$. Pokazać, że liczby z_1, z_2, z_3 są wierzchłkami trójkąta równobocznego wtedy i tylko wtedy, gdy $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

Zad. 33. Załóżmy, że $|z_k| = 1$ dla $k = 1, 2, 3, 4$. Pokazać, że liczby zespolone z_k są wierzchołkami prostokąta wtedy i tylko wtedy, gdy $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$.

Zad. 34. Liczby zespolone z_1, z_2, z_3 odpowiadają trzem kolejnym wierzchołkom pewnego równoległoboku. Wyznaczyć liczbę z_4, która odpowiada czwartemu wierzchołkowi tego równoległoboku.

Zad. 35. Liczby zespolone u, v odpowiadają dwóm przeciwległym wierzchołkom kwadratu. Wyznaczyć liczby odpowiadające pozostałym dwóm wierzchołkom tego kwadratu.

Zad. 36. Rozłożyć wielomiany $p(z) = z^3 + z^2 + z - 3$ i $q(z) = z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ na czynniki:

(a) rzeczywiste;

(b) zespolone jak najniższego stopnia.

Zad. 37. Niech $p(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$. Korzystając ze schematu Hornera obliczyć $p(-2)$ i wyznaczyć resztę z dzielenia p przez dwumian $x + 2$.

Zad. 38. Niech $p(x) = 5x^5 - 19x^3 - 7x^2 + 9x + 3$. Korzystając ze schematu Hornera obliczyć $p(2)$ i wyznaczyć resztę z dzielenia p przez dwumian $x - 2$.

Zad. 39. Zapisać wielomian $p(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 50x + 90$ jako sumę potęg dwumianu $x - 2$. Wykorzystać schemat Hornera.

Zad. 40. Dany jest wielomian $p \in \mathbb{R}[z]_2$. Pokazać, że suma kwadratów wszystkich (zespolonych) pierwiastków wielomianu p jest liczbą rzeczywistą. Czy jest to prawda, gdy $n > 2$ i $p \in \mathbb{R}[z]_n$?

Zad. 41. Wielomian $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ traktujemy jako element zbioru $\mathbb{Z}_2[x]$ (wielomiany o współczynnikach z ciała $\mathbb{Z}_2$ zmienej $x \in \mathbb{Z}_2$). Rozłożyć wielomian p na czynniki (także wielomiany z $\mathbb{Z}_2[x]$) możliwie niskiego stopnia. Zrobić to samo, rozważając zamiast $\mathbb{Z}_2$ ciało $\mathbb{Z}_3$.

Zad. 42. Rozłożyć na czynniki rzeczywiste i zespolone możliwie niskiego stopnia wielomiany $z^4 + z^2 + 1$ i $z^3 + 8$.