

2. Liczby zespolone

Zad. 1. Wyjaśnij pojęcia: jednostka urojona, liczba zespolona, część rzeczywista i urojona liczby zespolonej, moduł liczby zespolonej, sprzężenie liczby zespolonej. Podać interpretację geometryczną liczby zespolonej.

Zad. 2. Czy zbiór liczb zespolonych o module 1 z działaniem mnożenia jest grupą?

Zad. 3. Czy zbiór liczb zespolonych $\{z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\} : \operatorname{Re} z = 0 \text{ lub } \operatorname{Im} z = 0\}$ z działaniem mnożenia jest grupa?

Zad. 4. Pokazać, że zbiór liczb zespolonych \mathbb{C} z działaniami dodawania i mnożenia zdefiniowanymi następująco:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

oraz wyróżnionymi elementami 0 i 1 jest ciałem.

Zad. 5. Przedstawić w postaci algebraicznej liczby zespolone:

(a) $(-2 + 3i) + (7 - 8i) - (1 + 10i)$;

(b) $(\sqrt{2} + i) \cdot (3 - \sqrt{3}i)$;

(c) $\frac{1-i}{1+i}$;

(d) $(1 - i)^2$;

(e) $\frac{2-i}{3+4i}$.

Zad. 6. Obliczyć

$$\frac{(2+i)(3-i) + (2+3i)(3-4i)}{3+i}.$$

Zad. 7. Znaleźć liczby rzeczywiste x i y spełniające równanie $\frac{x+yi}{x-yi} = \frac{9-2i}{9+2i}$.

Zad. 8. W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równania:

(a) $z^2 - 4z + 13 = 0$;

(b) $2z + \bar{z} = 6 - 5i$;

(c) $\frac{2+i}{z-1+4i} = \frac{1-i}{2z+i}$.

Zad. 9. Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiory liczb z spełniających warunki:

(a) $\operatorname{Re}(iz + 2) \geq 0$;

(b) $\overline{z - i} = z - i$;

(c) $\operatorname{Im} \frac{1+iz}{1-iz} = 1$;

(d) liczba $\frac{z+4}{z-2i}$ jest rzeczywista.

Zad. 10. Uzasadnić równoważności:

(a) liczba zespolona z jest liczbą rzeczywistą $\iff z = \bar{z}$;

(b) liczba zespolona z jest liczbą czysto urojoną $\iff z = -\bar{z}$.

Zad. 11. Niech $z, w \in \mathbb{C}$. Pokazać, że:

$$(a) |zw| = |z| \cdot |w|;$$

$$(b) \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}, \text{ gdy } w \neq 0.$$

Zad. 12. Pokazać, że dla dowolnych liczb zespolonych z, w zachodzi nierówność

$$||z| - |w|| \leq |z - w|.$$

Zad. 13. Pokazać, że dla dowolnych liczb zespolonych z, w

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2.$$

Podać interpretację geometryczną.

Zad. 14. Wyzaczyć wszystkie liczby zespolone z takie, że:

$$(a) z^3 + |z|^2 + z = 0;$$

$$(b) \bar{z} = z^3.$$

Zad. 15. Pokazać, że:

$$(a) (1 + i)^{8n} = 2^{4n};$$

$$(b) (1 + i)^{4n} = (-1)^n 2^{2n}.$$

Zad. 16. Znaleźć wszystkie liczby zespolone z o module 1, dla których $z^2 + (1 + i)z$ jest liczbą czysto urojoną. Zaznaczyć ten zbiór punktów na płaszczyźnie \mathbb{C} .

Zad. 17. Wyznaczyć wszystkie liczby zespolone z takie, że liczba zespolona

$$\frac{1 + z}{1 - z}$$

jest rzeczywista.

Zad. 18. Wyznaczyć wszystkie liczby zespolone z takie, że

$$\left| \frac{1 + z}{1 - iz} \right| = 1.$$

Zad. 19. Pokazać, że dla dowolnych liczb zespolonych u, v

$$|u(1 + |v|^2) - v(1 + |u|^2)|^2 = |u - v|^2 \cdot |1 - u\bar{v}|^2 - (u\bar{v} - \bar{u}v)^2.$$