18. Formy hermitowskie

Zad. 1. Dla jakich wartości $a, b, c \in \mathbb{R}$ odwzorowanie

$$\phi(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 - x_1y_2 + x_2y_3 - x_3y_1 + ax_1y_3 + bx_2y_1 + cx_3y_2$$

jest formą hermitowską na $\mathbb{R}^3$? Wyznaczyć macierz tej formy w bazie $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$.

Zad. 2. Dla jakich wartości $a, b \in \mathbb{C}$ odwzorowanie $\phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$\phi(\vec{x}, \vec{y}) = \overline{(ax_1 - (2-i)x_2)}(-iy_1 + by_2),$$

jest formą hermitowską na $\mathbb{C}^2$? Wyznaczyć macierz tej formy w bazie $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$.

Zad. 3. Zbadać określoność formy kwadratowej $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$h(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3.$$

Zad. 4. Zbadać określoność formy kwadratowej $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

(a) $h(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3$;

(b) $h(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2(x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3)$.

Zad. 5. Pokazać, że odwzorowanie $\phi : \mathbb{K}^{m,n} \times \mathbb{K}^{m,n} \longrightarrow \mathbb{K}$ dane wzorem

$$\phi(A, B) = \mathrm{tr}(A^H B)$$

jest formą hermitowską na $\mathbb{K}^{m,n}$. Czy jest ona dodatnio określona?

Zad. 6. Zbadać określoność formy z zadania 1 i 2.

Zad. 7. Niech $A = A^H \in \mathbb{K}^{n,n}$. Pokazać, że forma hermitowska $\phi : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$

$$\phi(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^H A\vec{y}$$

jest dodatnio (ujemnie) określona wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne macierzy A są dodatnie (ujemne).

Zad. 8. Zbadać określoność formy hermitowskiej na $\mathbb{R}^3$

$$\phi(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^T \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix} \vec{y}$$

w zależności od wartości $a \in \mathbb{R}$.

Zad. 9. Macierz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{n,n}$ jest hermitowska oraz

$$a_{ii} > \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \quad \text{dla } j = 1, 2, ..., n.$$

Pokazać, że macierz A jest dodatnio określona.

Zad. 10. Niech $a \in \mathbb{R}$ oraz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zbadać określoność formy dwuliniowej $\phi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\phi(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^T A \vec{y}$, w zależności od wartości a.

Zad. 11. Niech dla $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$

$$f(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3.$$

Znaleźć formę hermitowską $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ taką, że $\phi(\vec{x}, \vec{x}) = f(\vec{x})$ dla każdego wektora $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Czy $f(\vec{x}) > 0$ dla każdego $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\vec{0}\}$?

Zad. 12. Wyznaczyć macierz formy kwadratowej $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2x_3$$

w bazie $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$ i podać jej wielomianową postać.

Zad. 13. Korzystając z bazy wektorów własnych macierzy formy kwadratowej $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 6x_1x_2 - 2x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2$$

sprowadzić F do postaci kanonicznej.

Zad. 14. Pokazać, że suma dodatniego i ujemnego indeksu bezwładności macierzy hermitowskiej $A \in \mathbb{C}^n$ jest mniejsza od n wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A jest osobliwa.

Zad. 15. Niech $C \in \mathbb{K}^n$ i $A = C^H C$. Pokazać, że dodatni indeks bezwładności macierzy A jest równy $n - \dim \ker C$.

Zad. 16. Wyznaczyć indeksy bezwładności macierzy

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & \\ & 1 & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$