17. Endomorfizmy liniowe - kontynuacja

Zad. 1. Niech $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, $n \geq 2$. Pokazać, że

$$p_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1}(\mathrm{tr}\ A)\lambda^{n-1} + q(\lambda) + \det_n(A),$$

gdzie q jest wielomianem stopnia $n-2$ takim, że $q(0) = 0$.

Zad. 2. Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć macierz nieosobliwą C i diagonalną D ($C, D \in \mathbb{R}^{2,2}$) takie, że $D = C^{-1}AC$.

Zad. 3. Wyznaczyć rozkład Jordana (czyli przedstawić jako iloczyn CJC^{-1}) macierzy:

(a) $A = \begin{bmatrix} -3 & -8 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$;

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}$;

(c) $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$;

(d) $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$;

(e) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$;

(f) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Zad. 4. Wyznaczyć rozkład Jordana macierzy

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Obliczyć D^{17}.

Zad. 5. Wyznaczyć bazę Jordana i macierz Jordana dla macierzy:

$$(a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix};$$

$$(b)\ A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Zad. 6. Wyznaczyć macierz Jordana dla macierzy $[\vec{e}_n, \vec{e}_1, ..., \vec{e}_{n-1}] \in \mathbb{C}^{n,n}$.

Zad. 7. Wyznaczyć postać Jordana macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Zad. 8. Dana jest macierz $B_a \in \mathbb{C}^{n,n}$

$$B_a = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

przy czym $a \geq 0$. Wyznaczyć wartości własne macierzy B_a w zależności od a i określić wymiary podprzestrzeni własnych odpowiadających poszczególnym wartościom własnym. Dla jakich wartości a macierz B_a jest diagonalizowalna?

Zad. 9. Dany jest endomorfizm $f \in L(\mathbb{R}^3)$

$$f(x, y, z) = (3x - z, x - 3y + 4z, x + z).$$

Znaleźć bazę Jordana i macierz Jordana tego endomorfizmu.

Zad. 10. Wyznaczyć bazę i macierz Jordana dla endomorfzmu $D \in L(\mathbb{R}[x]_n)$

$$D(p) = p'.$$

Zad. 11. Wyznaczyć macierz Jordana dla endomorfzmu $F \in L(\mathbb{K}[t]_n)$

$$F(p) = p - p''.$$

Zad. 12. Macierz $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ ma jedną wartość własną $\lambda \in \mathbb{K}$, a odpowiadająca jej podprzestrzeń własna V_λ ma wymiar równy n. Pokazać, że $A = \lambda I_n$.

Zad. 13. Niech $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, gdzie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

(*a*) Niech $B \in \mathbb{K}^{n,n}$ będzie macierzą podobną do A, $q \in \mathbb{K}[x]$ jest wielomianem. Pokazać, że macierze $q(A)$ i $q(B)$ też są podobne.

(*b*) Pokazać, że $p_A(A) = 0$.

Zad. 14. Znaleźć macierze diagonalną D i ortogonalną U takie, że $D = U^T AU$ dla

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zad. 15. Dany jest wektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ taki, że $\vec{v}^T \vec{v} = 1$. Niech $H = I - 2\vec{v}\vec{v}^T$. Pokazać, że macierz H jest ortogonalna. Wyznaczyć jej wartości własne i opisać podprzestrzenie własne.

Zad. 16. Macierz $U \in \mathbb{C}^{n,n}$ jest unitarna. Pokazać, że

(a) jeżeli $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ jest wartością własną U, to $|\lambda_1| = 1$;

(b) jeżeli λ_1 i λ_2 są różnymi wartościami własnymi, a $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ to odpowiadające im wektory własne, to $\vec{v_1} \perp \vec{v_2}$ (czyli $\vec{v}_1^H \vec{v}_2 = 0$).

Zad. 17. Niech $f \in L(\mathbb{R}^3)$

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y - z, x - y + 2z)$$

i niech

$$U = \{(0, t, -t) : t \in \mathbb{R}\}, \quad W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = z\}.$$

Wykazać, że U i W są podprzestrzeniami niezmienniczymi endomorfizmu f.