16. Endomorfizmy liniowe

Zad. 1. W $\mathbb{R}^2$ wyznaczyć macierz zmiany bazy $[-1,2]^T$, $[2,3]^T$ na bazę $[1,0]^T$, $[0,1]^T$ oraz macierz zmiany bazy $[1,0]^T$, $[0,1]^T$ na bazę $[-1,2]^T$, $[2,3]^T$.

Zad. 2. W $\mathbb{R}^3$ wyzbaczyć macierz zmiany bazy $[1,1,1]^T$, $[-2,1,1]^T$, $[-2,-2,1]^T$ na $[1,0,0]^T$, $[1,-1,0]^T$, $[1,1,-1]^T$.

Zad. 3. W $\mathbb{R}^4$ wyznaczyć macierz zmiany bazy $[1,1,1,1]^T$, $[1,1,-1,1]^T$, $[1,-1,-1,1]^T$, $[1,-1,1,-1]^T$ na bazę $[1,0,0,0]^T$, $[1,1,0,0]^T$, $[1,1,1,0]^T$, $[1,1,1,1]^T$.

Zad. 4. W $\mathbb{R}[x]_2$ wyznaczyć macierz zmiany bazy $1, x, x^2$ na bazę $1+x, 1-2x, x-x^3$.

Zad. 5. Przekształcenie $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ jest dane wzorem

$$f(\vec{x}) = [x_1 + x_2, x_2 + x_3]^T.$$

Znaleźć macierz f w bazach $(\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$, $(\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 - \vec{e}_2)$. Wykorzystać odpowiednie macierze zmiany bazy.

Zad. 6. Korzystając z odpowiednich macierzy zmiany bazy, znaleźć macierz przekształcenia liniowego

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(x) = [x_1 - x_2, x_2 - x_3]^T$$

w bazach $([1,2,2]^T, [1,1,1]^T, [1,1,2]^T)$ i $([1,1]^T, [1,0]^T)$.

Zad. 7. Korzystając z odpowiednich macierzy zmiany bazy, znaleźć macierz przekształcenia liniowego

$$F : \mathbb{R}[x]_1 \longrightarrow \mathbb{R}[x]_1, \quad F(p)(x) = (x+1)p(3)$$

w bazach $x+4$, $2x-3$.

Zad. 8. Zbadać podobieństwo macierzy

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Zad. 9. Macierze $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ są podobne. Pokazać, że

(a) $\mathrm{tr}\, A = \mathrm{tr}\, B$;

(b) $\mathrm{rank}\, A = \mathrm{rank}\, B$;

(b) $\chi_A = \chi_B$.

Zad. 10. Wyznaczyć wektory i wartości własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}.$$

Zad. 11. Wyznaczć wartości własne macierzy z $\mathbb{R}^{2,2}$ odpowiadających

(a) obrotowi o kąt $\frac{\pi}{2}$ względem punktu $(0,0)$;

(b) symetri względem os OX;

(b) jednokładności w skali -3 względem $(0,0)$.

Zad. 12. Wyznaczć zespolone wektory i wartości własne macierzy z $\mathbb{R}^{2,2}$ odpowiadającej obrotowi o kąt $\frac{\pi}{2}$ względem punktu $(0,0)$.

Zad. 13. Pokazać, że macierz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

nie ma rzeczywistych wartości własnych, ale ma zespolone wartości własne. Wyznaczyć odpowiadające im wektory własne.

Zad. 14. Znaleźć wartości własne i podprzestrzenie własne endomorfizmu

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x) = [x_1 - x_2 + 2x_3, 3x_2 - x_3, 4x_3]^T$$

w bazie standardowej.

Zad. 15. Wyznaczyć wartości własne i podprzestrzenie własne endomorfizmu

$$f(p)(t) = p'(t) + p(t), \quad p(t) \in \mathbb{R}[t]_2$$

w bazie standardowej.

Zad. 16. Znaleźć wartości własne i podprzestrzenie własne endomorfizmu

$$F : \mathbb{R}[x]_2 \longrightarrow \mathbb{R}[x]_2, \quad F(p)(x) = xp'(x)$$

w bazie standardowej.

Zad. 17. Dany jest endomorfizm $f \in L(\mathbb{R}[x]_n)$

$$f(w)(t) = t \cdot w'(t).$$

Pokazać, że wielomiany $1, t, t^2, ..., t^n$ są wektorami własnymi endomorfizmu f odpowiadającymi (kolejno) wartościom własnym $0, 1, ..., n$.

Zad. 18. Pokazać, że macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ nie jest diagonalizowalna.

Zad. 19. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Wyznaczyć jej wartości własne i podprzestrzenie własne. Czy macierz A jest diagonalizowalna nad $\mathbb{R}$ / nad $\mathbb{C}$?

Zad. 20. Wyznczyć wartości własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -8 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Dla każdej wartości własnej λ wyznaczyć bazę podprzestrzeni własnej V_λ. Pokazać, że macierz A jest diagonalizowalna i wyznaczyć macierz C taką, że macierz CAC^{-1} jest diagonalna.

Zad. 21. Dana jest macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1-5i & 12 \\ 2 & 1+5i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2}.$$

Obliczyć ślad macierzy A^{2016}.

Zad. 22. Dana jest macierz

$$A = \begin{bmatrix} 8-5i & -6 \\ 4-5i & -3+5i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2}.$$

Obliczyć $\det(A^{-2016})$.

Zad. 23. Niech

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Obliczyć A^{50}.

Zad. 24. Czy macierz

$$U = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{4,4}$$

jest diagonalizowalna nad $\mathbb{R}$? Jeżeli tak, to wyznaczyć jej wartości własne, wielomian charakterystyczny i podprzestrzenie własne.

Zad. 25. Dana jest macierz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczyć wszystkie wartości własne macierzy A i znaleźć bazy odpowiadających im podprzestrzeni własnych.

Zad. 26. Macierz $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ jest diagonalizowalna i nieosobliwa. Pokazać, że macierz A^{-1} też jest diagonalizowalna.

Zad. 27. Pokazać, że dwie macierze diagonalne są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy różnią się jedynie kolejnością elementów na przekątnej.

Zad. 28. Niech $a \in \mathbb{K}$ oraz

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & & & & \\ & a & 1 & & & \\ & & a & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 & \\ & & & & a & 1 \\ & & & & & a \end{bmatrix}.$$

Wyznaczyć wielomian charkterystyczny macierzy A. Pokazać, że A ma dokładnie jedną wartość własną równą a. Jaki jest wymiar podprzestrzeni włąsnej odpowiadającej wartości własnej a?