15. Przekształcenia liniowe i przestrzenie dualne

Zad. 1. Niech $F \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ będzie przekstałceniem, które w bazie $[1,1,1]^T, [1,2,3]^T, [1,0,1]^T$ ma macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć macierz F w bazie $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Zad. 2. Dla jakich $m \in \mathbb{C}$ przekszałcenie liniowe $f \in L(\mathbb{C}[x]_2, \mathbb{C}[x]_2)$ zadane wzorem

$$f(p) = p'(x-m) - p(1)(x+m)^2 + p(0)x^2$$

jest izomorfizmem?

Zad. 3. Czy odwzorowania

(a) $A \mapsto A^T$,

(b) $A \mapsto A^H$,

są izomorfizmami przestrzeni $\mathbb{C}^{m,n}$ i $\mathbb{C}^{n,m}$?

Zad. 4. Niech $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}[t]_3)$,

$$f(x) = (x_1 - x_2)t + (x_2 + 3x_3)(1 + t^3) + (x_1 + x_3)(1 - t^2),$$

dla $x = [x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^3$ oraz $g \in L(\mathbb{R}[t]_3, \mathbb{R}^3)$,

$$g(p) = \begin{bmatrix} p'(1) + p(0) \\ p'(-1) - p(0) \\ p(1) + p(-1) \end{bmatrix}.$$

(a) Które z przekształceń $f, g, f \circ g, g \circ f$ jest monomorfizmem, epimorfizmem, izomorfizmem?

(b) Znaleźć jądra i obrazy przekształceń $f, g, f \circ g, g \circ f$.

(c) Wyznaczyć macierz przekształcenia $f \circ g$ w bazie $1, t, t^2, t^3$ przestrzeni $\mathbb{R}[t]_3$.

(d) Wyznaczyć macierz przekształcenia $g \circ f$ w bazie kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Zad. 5. Zbadać, dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ przekształcenie liniowe $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}[t]_2)$ takie, że

$$f([1,1,0]^T) = 1 + t + at^2, \quad f([1,-1,0]^T) = 1 + at - at^2, \quad f([1,1,1]^T) = a + at^2$$

jest

(a) monomorfizmem;

(b) epimorfizmem;

(c) izomorfizmem.

Zad. 6. W przestrzeni $(\mathbb{R}^3)^*$ znaleźć bazę u_1^*, u_2^*, u_3^* dualną do bazy

$$\vec{u}_1 = [1,0,0]^T, \quad \vec{u}_2 = [1,1,0]^T, \quad \vec{u}_3 = [1,1,1]^T.$$

Następnie

(a) znaleźć współrzędne wektora $\vec{x} = [0,0,1]^T$ w bazie $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$;

(b) zapisać funkcjonał $x^*(\vec{x}) = x^2 - 6x_3$ w bazie u_1^*, u_2^*, u_3^*.

Zad. 7. W przestrzeni $(\mathbb{R}[x]_n)^*$ wyznaczyć bazę dualną do bazy

$$1,\ 1+x,\ 1+x^2,\ ...,\ 1+x^n.$$

Wyznaczyć współczynniki funkcjonału $f(p) = p(0) + p'(1)$ w tej bazie.

Zad. 8. W przestrzeni $(\mathbb{R}[x]_n)^*$ wyznaczyć bazę dualną do bazy

$$1,\ 1+x,\ x+x^2,\ ...,\ x^{n-1}+x^n.$$

Wyznaczyć współczynniki funkcjonału $f(p) = p(1) + p(-1) - 3p'(0)$ w tej bazie.

Zad. 9. W przestrzeni $\mathbb{R}^2$ dana jest baza $[1,2]^T$, $[-1,3]^T$. Wyznaczyć bazę sprzężoną w $(\mathbb{R}^2)^*$. Zapisać wektory $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$ w tej bazie.

Zad. 10. Dla $n+1$ parami różnych liczb $x_0, x_1, ..., x_n$ określamy funkcjonały liniowe $f_k^* \in (\mathbb{R}[x]_n)^*$:

$$f_k^*(p) = p'(x_k), \quad k = 0,1,2,...,n.$$

(a) Niech $n = 2$ i $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. Pokazać, że funkcjonały f_0^*, f_1^*, f_2^* są liniowo zależne.

(b) Pokazać, że funkcjonały f_k^*, $k = 0,1,...,n$ są liniowo zależne w ogólnym przypadku (dla dowolnych n i parami różnych x_k.