14. Przekształcenia liniowe

Zad. 1. Które z poniższych odwzorowań $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ są przekształceniami liniowymi:

(a) $f\left([x_1, x_2, x_3]^T\right) = [x_1 - 3x_2 - 2, 4x_1 + 2x_2 - 7]^T$;

(b) $f\left([x_1, x_2, x_3]^T\right) = [x_1 - x_2 + 3x_3, 5x_1 - 4x_2 + 2x_3]^T$;

(c) $f\left([x_1, x_2, x_3]^T\right) = [0, |x_1| - 2|x_2| - |x_3|]^T$;

(d) $f\left([x_1, x_2, x_3]^T\right) = [x_2(x_2 - x_1), x_3 + x_2]^T$?

Zad. 2. Które z poniższych odwzorowań $F : \mathbb{K}[t] \longrightarrow \mathbb{K}[t]$ są przekształceniami liniowymi:

(a) $F(p)(t) = p(at + b)$, $a, b \in \mathbb{K}$ są ustalonymi skalarami;

(b) $F(p)(t) = p(t + 1) - p(t)$;

(c) $F(p)(t) = q_0(t) \cdot f(t)$, gdzie $q_0 \in \mathbb{K}[t]$ jest ustalonym wielomianem;

(d) $F(p)(t) = f(f(t))$?

Zad. 3. Dane jest przekształcenie liniowe $f \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ takie, że

$$f([3,1]^T) = [4, 5, -1]^T, \quad f([7,2]^T) = [-3, 0, 5]^T.$$

Znaleźć macierz $A \in \mathbb{R}^{3,2}$ taką, że dla każdego $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ $f(\vec{x}) = A\vec{x}$.

Zad. 4. Pzekształcenie liniowe $f \in L(\mathbb{R}^{,}\mathbb{R}^2)$ spełnia

$$f([1,2,1]^T) = [7,2]^T, \quad f([3,2,4]^T) = [0,17]^T, \quad f([5,1,2]^T) = [17,12]^T.$$

Znaleźć macierz $A \in \mathbb{R}^{2,3}$ taką, że $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ dla każdego $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

Zad. 5. Wyznaczyć macierz przekształcenia $F \in L(\mathbb{K}[x]_2, \mathbb{K}[x]_2)$, $F(p)(t) = p(at + b)$, $a, b \in \mathbb{K}$ są ustalonymi skalarami, w bazie $1, t, t^2$.

Zad. 6. Przekształcenie liniowe $f : \mathbb{R}[x]_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ spełnia warunki

$$f(1 + t) = [1,7]^T, \quad f(2 - t) = [-5,2]^T, \quad f(1 - 3t + t^2) = [2,4]^T.$$

Wyznaczyć $f(t^2)$.

Zad. 7. Niech $f \in L(X,Y)$, $g \in L(Y,Z)$, gdzie X, Y, Z są przekształceniami liniowymi nad ciałem $\mathbb{K}$. Pokazać, że odwzorowanie

$$h = g \circ f, \quad h(x) = g(f(x)), \quad x \in X$$

jest przekształceniem liniowym z X w Z, czyli $h \in L(X,Z)$.

Zad. 8. Znaleźć macierz przekształcenia $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$

$$f([x_1, x_2, x_3]^T) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + 3x_3 \\ 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}$$

(a) w bazach $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ w dziedzinie $\mathbb{R}^3$ i $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ w przecidziedzinie $\mathbb{R}^2$;

(b) w bazach $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ w dziedzinie i $\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ w przecidziedzinie;

(c) w bazach $[1, 1, 1]^T, [0, 1, -1]^T, [2, 0, 1]^T$ w dziezinie i $[1, 1]^T, [1, -1]^T$ w przeciwdziedzinie.

Zad. 9. Wyznaczyć macierz przekształcenia liniowego $F \in \mathbb{R}[x]_2$,

$$F(p)(t) = p(t+1) - p(t),$$

w bazie $1, t, t^2$ (w dziedzinie i przeciwdziedzinie).

Zad. 10. Znaleźć macierz przekształcenia $D \in L(\mathbb{K}[x]_n, \mathbb{K}[x]_n)$,

$$D(p) = p',$$

w bazie $1, x, ..., x^n$.

Zad. 11. Wyznaczyć jądra i obrazy przekształceń z trzech poprzednich zadań.

Zad. 12. Dane jest przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}[x]_2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$:

$$F(p) = \begin{bmatrix} p(-1) - p(1) \\ p(0) \\ p(-1) + p(1) \\ p(2) \end{bmatrix}.$$

(a) Wyznaczyć bazę jądra i obrazu F.

(b) Znaleźć macierz F w bazach $(1, t, t^2)$ i $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$.

(c) Znaleźć macierz F w bazach $(1, 1+t, 1+t^2)$ i $(\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_3 + \vec{e}_4)$.

Zad. 13. Znaleźć macierz przekształcenia $D \in L(\mathbb{K}[x]_n, \mathbb{K}[x]_n)$,

$$D(p) = p'$$

w bazie $1, 1+x, ..., 1+x+\cdots+x^n$.

Zad. 14. Załóżmy, że $f \in L(X, Y)$ i układ wektorów $x_1, ..., x_k \in X$ jest liniowo zależny. Pokazać, że układ wektorów $f(x_1), ..., f(x_n) \in Y$ też jest liniowo zależny.

Zad. 15. Przekształcenie liniowe $f \in L(X, Y)$, które jest różnowartościowe nazywamy *monomorfizmem.* Pokazać, że $f \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ dane wzorem

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{bmatrix}$$

jest monomorfizmem. Wyznaczyć obraz tego przekształcenia.

Zad. 16. Załóżmy, że $\dim X < \infty$ i $f \in L(X, Y)$. Pokazać równoważność poniższych warunków:

(i) f jest monomorfizmem;

(ii) $\ker f = \{0\}$;

(iii) $\dim \operatorname{im} f = \dim X$.

Zad. 17. Przekształcenie liniowe $f \in L(X, Y)$ takie, że $\operatorname{im} f = Y$ nazywamy *epimorfizmem*. Pokazać, że przekształcenie $g \in L(\mathbb{R}[x]_3, \mathbb{R}^3)$ dane wzorem

$$g(p) = \begin{bmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \end{bmatrix}$$

jest epimorfizmem.

Zad. 18. Zbadać, które z poniższych przekształceń są monomorfizmami / epimorfizmami. Wyznaczyć ich jądra i obrazy:

(a) $F \in L(\mathbb{R}[x]_3, \mathbb{R}[x]_3)$, $F(p)(t) = p(t+1) - p(t)$;

(b) $D \in L(\mathbb{R}[x]_n, \mathbb{R}[x]_n)$, $D(p) = p'$.

Zad. 19. Zbadać, któe z poniższych przekształceń są monomorfizmami / epimorfizmami. Wyznaczyć ich jądra i obrazy:

(a) $F \in L(\mathbb{R}[x]_3, \mathbb{R}[x]_3)$, $F(p)(t) = p'(t+1) - p'(t) + p(t)$;

(b) $D \in L(\mathbb{R}[x]_n, \mathbb{R}[x]_{n-1})$, $D(p) = p'$;

(c) $f \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}[x]_3)$, $f(p) = (x_1 + x_2) + (x_2 + x_3)t + (x_3 + x_4)t^2 + (x_4 + x_1)t^3$.

Zad. 20. Znaleźć bazę dla przestrzeni $L(\mathbb{R}[x]_2, \mathbb{R}^2)$. Zapisać przekształcenie liniowe $f(p) = [p(0), p(1) - 3p'(1)]^T$ jako kombinację liniową elementów tej bazy.

Zad. 21. Załóżmy, że układ $x_1, ..., x_n$ jest bazą przestrzeni liniowej X nad ciałem $\mathbb{K}$. Pokazać, że dla $j = 1, 2, ..., n$ odwzorowanie $\phi_j : X \longrightarrow \mathbb{K}$,

$$\phi_j(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) = \alpha_j,$$

jest przekształceniem liniowym z $L(X, \mathbb{K})$.

Zad. 22. Przekształcenie liniowe $f : \mathbb{R}[x]_2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ jest zadane przez warunki

$$f(1) = [1, 0, -1, 0]^T, \quad f(t) = [2, -1, 0, 3]^T, \quad f(t^2) = [3, 0, 2, -2]^T.$$

Znaleźć macierz f w bazach $(1 + t^2, 1 - t^2, t)$ w $\mathbb{R}[x]_2$ i $[1, 1, 1, 1]^T$, $[1, 1, -1, -1]^T$, $[1, -1, 1, -1]^T$, $[1, -1, -1, 1]^T$ w $\mathbb{R}^4$.

Zad. 23. Niech $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ i $f \in L(X, Y)$ ma w pewnych bazach macierz A.

(a) Pokazać, że f jest monomorfizmem wtedy itylko wtedy, gdy $\ker A = \{0\}$.

(b) Pokazać, że f jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{rank} A = m$.

Zad. 24. Przestrzenie liniowe X i Y nad ciałem $\mathbb{K}$ mają skończony wymiar i istnieje $f \in L(X, Y)$, które jest jednocześnie monomorfizmem i epimorfizmem. Pokazać, że $\dim X = \dim Y$.

Zad. 25. Znaleźć bazę przestrzeni $L(V, W)$, gdzie

$$V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + x_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^3,$$

$$W = \{p \in \mathbb{R}[x]_3 : p(1) = p'(1)\} \subset \mathbb{R}[x]_3.$$

Zad. 26. Załóżmy, że $f \in L(X, Y)$, $\dim X = n$, $\dim Y = m$ i $\dim \ker f = k$. Dla jakich wartości k, m, n przekształcenie liniowe f może być:

(a) monomorfizmem;

(b) epimorfizmem?

Zad. 27. Niech $f \in L(X, Y)$ i $U \subset X$ jest podprzestrzenią liniową. Pokazać, że zbiór

$$f(U) = \{y \in Y : y = f(x) \text{ dla pewnego } x \in U\}$$

jest podprzestrzenią liniową w Y.