13. Ortogonalizacja Grama-Schmidta, dopełnienie i rzut ortogonalny

Zad. 1. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym przeprowadzić ortogonalizację Grama-Schmidta układu wektorów

$$\vec{x}_1 = [1, 2, -2]^T, \quad \vec{x}_2 = [-2, -1, 7]^T, \quad \vec{x}_3 = [5, 0, -2]^T.$$

Czy otrzymany układ jest bazą ortogonalną? Jeżeli tak, to zapisać wektor $\vec{e}_1$ za pomocą wektorów z tej bazy.

Zad. 2. W przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$ z iloczynem skalarnym

$$\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

przeprowadzić ortogonalizację Grama-Schmidta układu wielomianów

$$t^2 - 1, \quad -t + 1, \quad t + 1.$$

Zad. 3. W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym przeprowadzić ortogonalizację Grama-Schmidta układu wektorów

$$\vec{v}_1 = [1, 1, -1, -1]^T, \quad \vec{v}_2 = [-3, 1, -1, 3], \quad \vec{v}_3 = [6, -4, -2, 0].$$

Uzyskany układ wektorów uzupełnić do bazy ortogonalnej przestrzeni $\mathbb{R}^4$ i wyznaczyć współrzędne wektora $\vec{e}_1$ w tej bazie.

Zad. 4. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym przeprowadzić ortogonalizację Grama-Schmidta układu wektorów

$$\vec{v}_1 = [1, 2, -2]^T, \quad \vec{v}_2 = [-2, -1, 7], \quad \vec{v}_3 = [5, 0, -2].$$

Czy otrzymany układ jest bazą ortogonalną? Jeżeli tak, to zapisać wektor $\vec{e}_1$ za pomocą wektorów z tej bazy.

Zad. 5. W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym dane są wektory

$$\vec{v}_1 = [1, -2, -1, 2]^T, \quad \vec{v}_2 = [0, 3, 2, -1]^T, \quad \vec{v}_3 = [7, -1, -5, 3]^T.$$

Stosując ortogonalizację Grama-Schmidta znaleźć bazę ortogonalną podprzestrzeni $V = \operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$. Wyznaczyć liczby rzeczywiste $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ takie, że

$$V = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0\right\}.$$

Zad. 6. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym znaleźć bazę ortogonalną podprzestrzeni

$$V = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\right\}$$

i uzupełnić ją do bazy ortogonalnej całej przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Zad. 7. W przestrzeni $\mathbb{R}[t]_2$ rozważamy iloczyn skalarny

$$\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Wyznaczyć wszystkie wielomiany $q \in \mathbb{R}[x]_2$ ortogonalne do wielomianu $p(x) = x^2 - 1$. Podać przykład bazy ortogonalnej w przestrzeni $\mathbb{R}[t]_2$ z podanym iloczynem skalarnym.

Zad. 8. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ znaleźć bazy ortogonalne podprzestrzeni

$$V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 3x_2 + x_3 = 0\}$$

i podprzestrzeni $V^\perp$. Znaleźć rzuty ortogonalne wektora $\vec{x} = [-2, 1, 4]^T$ na te podprzestrzenie.

Zad. 9. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ znaleźć rzut ortogonalny wektora $\vec{x}[-2, 1, 4]^T$ na płaszczyznę $x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$.

Zad. 10. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ znaleźć rzut ortogonalny wektora $\vec{x} = [-2, 1, 4]^T$ na płaszczyznę $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Zad. 11. Niech $n > 1$. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym rozważamy podprzestrzeń

$$V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}.$$

(a) Znaleźć bazę ortogonalną podprzestrzeni $V^\perp$.

(b) Wyznaczyć rzut ortogonalny wektora $\vec{x} = [n, 0, ..., 0]^T$ na podprzestrzeń V.

Zad. 12. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym dana jest podprzestrzeń liniowa

$$X = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_4 = x_2 + x_3 - x_4 = 0\right\}.$$

Znaleźć bazy ortogonalne podprzestrzeni X i $X^\perp$. Wyznaczyć rzuty ortogonalne wektora $[3, 3, 3, 3]^T$ na podprzestrzenie X i $X^\perp$.

Zad. 13. W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym dana jest podprzestrzeń

$$V = \operatorname{span}\left([1, 1, 1, 1]^T, [0, -3, 1, 0]^T\right).$$

Znaleźć rzuty ortogonalne wektora $\vec{x} = [1, 0, -1, 0]^T$ na podprzestrzenie V i $V^\perp$.

Zad. 14. W skończenie wymiarowej przestrzeni z iloczynem skalarnym $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ dane są podprzestrzenie U, V. Pokazać, że

(a) $(U^\perp)^\perp = U$;

(b) jeżeli $U \subset V$, to $V^\perp \subset U^\perp$;

(c) $(U + V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$;

(d) $U \cap V)^\perp = U^\perp + V^\perp$.

Zad. 15. Pokazać, że nierówność Schwarza staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy wektory x i y są liniowo zależny.

Zad. 16. Udowodnić, że w przestrzeni euklidesowej / unitarnej $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ rzut ortogonalny $P_Z(x)$ wektora $x \in X$ na podprzestrzeń liniową Z spełnia nierówność

$$\|x - P_Z(x)\| \le \|x - z\|$$

dla każdego wektora $z \in Z$. Pokazać, że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $z = P_Z(x)$.

Zad. 17. Układ $x_1, ..., x_k$ w przestrzeni z iloczynem skalarnym $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ jest ortogonalny. Udowodnić *nierówność Bessela*: dla dowolnego wektora $y \in X$

$$\sum_{i=1}^{k} |\langle x_i, y\rangle|^2 \le \|y\|^2.$$

Zad. 18. W przestrzeni $\mathbb{K}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym dana jest podprzestrzeń V. Układ wektorów $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k$ jest bazą ortonormalną podprzestrzeni V. Niech

$$A = \vec{v}_1\vec{v}_1^H + \cdots + \vec{v}_k\vec{v}_k^H.$$

(a) Pokazać, że dla każdego wektora $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$ $P_V(\vec{x}) = A\vec{x}$.

(b) Jaki jest rząd macierzy A? Wyznaczyć podprzestrzeń $\mathrm{im}A$ oraz $\ker A$.

Zad. 19. W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym dana jest podprzestrzeń

$$U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : x_1 = x_2 = \ldots x_n\}.$$

Wyznaczyć bazy ortogonalne podprzestrzeni U i $U^\perp$ i określić ich wymiary. Znaleźć rzuty ortogonalne wektorów $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$ na podprzestrzeń U i $U^\perp$.

Zad. 20. W przestrzeni $\mathbb{K}^n$ rozważamy standardowy iloczyn skalarny. Niech $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ i załóżmy, że kolumny macierzy A tworzą układ ortonormalny. Uzasadnić, że macierz A jest nieosobliwa. Jak wygląda macierz A^{-1}?

Zad. 21. W $\mathbb{R}^n$ wyznaczyć cosinus kąta między wektorem $\vec{e}_k$, $k = 1, 2, ..., n$ i podprzestrzeni

$$V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}.$$

Zad. 22. Pokazać, że wyznacznik Grama liniowo niezależnego układu wektorów jest liczbą rzeczywistą dodatnią.

Zad. 23. Pokazać, że wyznacznik Grama liniowo niezależnego kładu wektorów $v_1, ..., v_k$ nie ulegnie zmianie w wyniku ortogonalizacji Grama-Schmidta tego układu.

Zad. 24. Jak wygląda macierz Grama ortogonalnego (ortonormalnego) układu wektorów?

Zad. 25. W przestrzeni $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) dana jest baza $\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n$. Niech $G = \left[\vec{x}_i^H\vec{x}_j\right]_{i,j=1}^n \in \mathbb{K}^{n,n}$ będzie macierzą Grama układu $x_1, ..., x_n$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Dla $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{K}^n$ niech

$$\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle_A = \vec{x}^H G\vec{y}.$$

Pokazać, że $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ jest iloczynem skalarnym na $\mathbb{K}^n$.

Zad. 26. Niech $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ będzie przestrzenią z iloczynem skalarnym skończonego wymiaru. Pokazać, że $X^\perp = \{0\}$ i $\{0\}^\perp = X$.

Zad. 27. Pokazać, że na przestrzeni $\mathbb{K}^{m,n}$ moża określić iloczyn skalarny w następujący sposób:

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{trace}(AB^H).$$

Zapisać wzór na normę macierzy pochodzącą od powyższego iloczynu skalarnego.