# 12. Iloczyny skalarne i normy, ortogonalność wektorów

Zad. 1. Która z poniższych funkcji jest iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^3$:

$(a)$ $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$;

$(b)$ $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$;

$(c)$ $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 - 3x_3y_3$;

$(d)$ $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1$?

Zad. 2. Która z poniższych funkcji jest iloczynem skalarnym na $\mathbb{C}^3$:

$(a)$ $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$;

$(b)$ $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \overline{x}_1y_2 + \overline{x}_2y_1 + \overline{x}_2y_3 + \overline{x}_3y_2$;

$(c)$ $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \overline{x}_1y_1 + 3\overline{x}_2y_2 + 2\overline{x}_3y_3 + 2i(\overline{x}_2y_3 - \overline{x}_3y_2)$;

$(d)$ $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = [x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}[y_1,y_2,y_3]^T$?

Zad. 3. Sprawdzić, że podany układ wektorów

$$\vec{v}_1 = [1,1,1]^T, \quad \vec{v}_2 = [1,-2,1]^T, \quad \vec{v}_3 = [1,0,-1]^T$$

jest bazą ortogonalną w $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Zapisać wektor $\vec{x} = [1,3,-5]^T$ jako kombinację liniową $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$.

Zad. 4. Sprawdzić, że układ wektorów

$$\vec{v}_1 = [1,1,1,0]^T, \quad \vec{v}_2 = [-1,3,-2,1]^T, \quad \vec{v}_3 = [-1,0,1,1]^T$$

jest ortogonalny w $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym i uzupełnić go do bazy ortogonalnej przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Zapisać wektor $\vec{x} = [1,1,-1,-1]^T$ jako kombinację liniową wektorów z tej bazy.

Zad. 5. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym:

$(a)$ obliczyć normę wektora $[-1,1,2,-3]^T$;

$(b)$ zbadać ortogonalność wektorów $[1,4,-1,2]^T$, $[3,-1,2,-1]^T$.

Zad. 6. W przestrzeni unitarnej $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ dany jest układ ortonormalny $u_1,u_2,u_3,u_4$. Niech $x = u_1 - 2u_2 + 4u_4$, $y = -u_1 + u_2 + u_3$. Obliczyć $\langle x,y\rangle$ oraz $\|x\|$ i $\|y\|$.

Zad. 7. Pokazać, że

$$\langle p,q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

jest iloczynem skalarnym na przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$. Obliczyć normę wielomianu $p(x) = 1 + x + x^2$. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $w$ ortogonalne do tego wielomianu.

Zad. 8. W $\mathbb{C}^3$ z iloczynem skalarnym $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \vec{x}^H\vec{y}$ rozważamy zbiór

$$U = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^3 : \vec{x}\perp[1,1+i,i]^T\}.$$

Pokazać, że $U$ jest podprzestrzenią liniową. Wyznaczyć bazę $U$.

Zad. 9. Pokazać, że w przestrzeni euklidesowej $X$ dwa wektory $\vec{x}$, $\vec{y}$ spełniają $\|x\| = \|y\|$ wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $x+y$ i $x-y$ są ortogonalne.

Zad. 10. *Kulą jednostkową* w przestrzeni $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ nazywamy zbiór

$$B = B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}.$$

Pokazać, że kula jednostkowa jest *zbiorem wypukłym*, tzn. jeżeli $x, y \in B_X$, $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ i $\alpha + \beta = 1$, to

$$\alpha x + \beta y \in B_X.$$

Zad. 11. Dane są liczby rzeczywiste dodatnie $a_1, a_2, ..., a_n$. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ rozważamy zbiór

$$E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : |x_1| \leq a_1, |x_2| \leq a_2, ..., |x_n| \leq a_n\}.$$

Czy zbiór $E$ jest wypukły?

Zad. 12. Pokazać, że dla dowolnych liczb zespolonych $z_1, z_2, ..., z_n$ zachodzi nierówność

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{k}\right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2\right).$$

Zad. 13. Niech $x_0, ..., x_n \in \mathbb{K}$ będą różnymi punktami. Dla $p, q \in \mathbb{K}[x]_n$ określamy

$$\langle p, q\rangle = \sum_{k=0}^{n} \overline{p(x_k)} q(x_k).$$

Pokazać, że jest to iloczyn na przestrzeni $\mathbb{K}[x]_n$. Czy będzie to prawda, jeśli weźmiemy pewne $k+1$ różnych punktów $x_0, x_1, ..., x_k$ dla $k \neq n$? Zapisać wzór na normę na przestrzeni $\mathbb{K}[x]_n$ zadaną przez taki iloczyn skalarny.

Zad. 14. Stosując nierówność Schwarza w odpowiednich przestrzeniach euklidesowych uzasadnić, że zachodzą nierówności:

($a$) $(ab + bc + ac)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)^2$ dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{R}$;

($b$) $(a_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_n^4)$ dla dowolnych $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$.

Zad. 15. W przestrzeni euklidesowej $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ dane są wektory $x, y$. Pokazać, że

($a$) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$;

($b$) $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$.

Zad. 16. W przestrzeni euklidesowej lub unitarnej $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ dany jest ortogonalny układ wektorów $x_1, ..., x_k$. Pokazać, że

$$\sum_{j=1}^{k} \|x_j\|^2 = \left\|\sum_{j=1}^{k} x_j\right\|^2.$$

Zad. 17. W $\mathbb{R}^n$ rozważamy standardowy iloczyn skalarny $\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle = \vec{x}^T\vec{y}$. Niech $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Pokazać, że $A^TA = I_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ortonormalnego układu wektorów $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n \in \mathbb{R}^n$ układ $A\vec{u}_1, ..., A\vec{u}_n$ też jest ortonormalny.

Zad. 18. W przestrzeni z iloczynem skalarnym $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ dany jest układ wektorów $v_1, ..., v_k$. Macierz

$$G = G(v_1, ..., v_k) = [\langle v_i, v_j\rangle]_{i,j=1}^k$$

nazywamy *macierzą Gramma* układu $v_1, ..., v_k$. Udowodnić, że układ wektorów $v_1, ..., v_k$ jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $G(v_1, ..., v_k)$ jest nieosobliwa.

Zad. 19. Pokazać, że dla dowolnych wektorów $x, y$ z przestrzeni unitarnej $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$

$$\langle x, y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2}{4}.$$

Zad. 20. Pokazać, że dwa wektory $x$, $y$ z pewnej przestrzeni unitarnej są ortogonalne wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych skalarów $\alpha$, $\beta$

$$\|\alpha x + \beta y\|^2 = \|\alpha x\|^2 + \|\beta y\|^2.$$

Zad. 21. Pokazać, że dla dowolnego wektora $\vec{x} = [x_1, ..., x_n]^T \in \mathbb{C}^n$ prawdziwe jest oszacowanie $|x_1 + \cdots + x_n| \leq \sqrt{n}\|x\|$, gdzie $\|x\|^2 = \bar{\vec{x}}^T\vec{x}$.