Zestaw zadań z Geometrii z algebrą liniową
dla kierunku Informatyka, rok akadem. 2015/2016

11. Wyznaczniki

Zad. 1. Obliczyć wyznaczniki:

$$(a)\ \det_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix},$$

$$(b)\ \det_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$(c)\ \det_4 \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -5 \end{bmatrix},$$

$$(d)\ \det_4 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ -4 & -1 & -2 & -6 & 3 \\ 2 & -3 & -3 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & -7 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & -6 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zad. 2. Dla $a \in \mathbb{R}$ obliczyć wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a-2 & a-3 & a-4 \\ a+1 & a-1 & a-3 \\ a-4 & a-7 & a-10 \end{vmatrix}.$$

Zad. 3. Obliczyć wyznacznik

$$\det_n \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & -3 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & -4 & ... & -(n-1) & 0 \end{bmatrix}.$$

Zad. 4. Obliczyć wyznacznik Vandermonde'a

$$V_n(x_0, x_1, ..., x_{n-1}) = \det_n \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix},$$

gdzie $x_0, x_1, ..., x_{n-1} \in \mathbb{C}$.

Zad. 5. Obliczyć wyznacznik

$$\det_n \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 0 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 0 & 0 & 4 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & n \end{bmatrix}.$$

Zad. 6. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 8-5i & -6 \\ 4-5i & -3+5i \end{bmatrix}.$$

Obliczyć $\det_2 \left(A^{-2015}\right)$.

Zad. 7. Dana jest liczba rzeczywista x. Obliczyć wyznacznik

$$\det_n \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ x & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ x & x & 1 & \dots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Zad. 8. Dane są liczby rzeczywiste $a_1, ..., a_n, b$. Obliczyć wyznacznik macierzy

$$\begin{bmatrix} a_1+b & b & \dots & b \\ b & a_2+b & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \dots & a_n+b \end{bmatrix}.$$

Zad. 9. Dane są liczby rzeczywiste $a_1, ..., a_n, b$. Obliczyć wyznacznik macierzy

$$\det_n \begin{bmatrix} a_1+b & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2+b & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n+b \end{bmatrix}.$$

Zad. 10. Dla $a = 1, 2, 4$ obliczyć wyznacznik

$$d(a)_n = \det_n \begin{bmatrix} a & 1 & & & & & \\ 1 & a & 1 & & & & \\ & 1 & a & 1 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & a & 1 \\ & & & & & 1 & a \end{bmatrix}.$$

Zad. 11. Niech $A \in \mathbb{K}^{n,n}$. Macierz dopełnień algebraicznych macierzy A jest to macierz $C_A = [c_{i,j}] \in \mathbb{K}^{n,n}$, gdzie

$$a_{i,j} = (-1)^{i+j} \cdot \det_{n-1} A_{i,j}.$$

Pokazać, że $A \cdot (C_A)^T = \det_n A \cdot I_n$ i

$$A^{-1} = \frac{1}{\det_n A} \cdot (C_A)^T.$$

Zad. 12. (Wzory Cramera) Załóżmy, że macierz kwadratowa $A = [\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n] \in \mathbb{K}^{n,n}$ jest nieosobliwa, $\vec{b} \in \mathbb{K}^n$ i $\vec{x} = [x_1, ..., x_n]^T \in \mathbb{K}^n$ jest rozwiązaniem układu równań $A\vec{x} = \vec{b}$. Pokazać, że

$$x_j = \frac{\det_n[\vec{a}_1, ..., \vec{a}_{j-1}, \vec{b}, \vec{a}_{j+1}, ..., \vec{a}_n]}{\det_n A}.$$

Zad. 13. Macierz $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ spełnia warunek $AA^H = I_n$. Jakie wartości może przyjmować $\det_n A$?

Zad. 14. Macierz $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ spełnia warunek $A^k = I_n$. Jakie wartości może przyjmować $\det_n A$?

Zad. 15. Dana jest macierz $A = [a_{i,j}]_{i,j=1}^n$ taka, że

$$a_{i,j} = \begin{cases} 2, & \text{gdy} \quad i = j, \\ 1, & \text{gdy} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Obliczyć $\det_n A$.