

10. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań układów równań liniowych

Zad. 1. Określić, dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ układ równań

$$\begin{cases} ax + y + z = 1, \\ x + ay + z = 1, \\ x + y + az = 1, \end{cases}$$

jest sprzeczny / niesprzeczny / oznaczony.

Zad. 2. Dany jest układ równań

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 5. \end{cases}$$

Stosując eliminację Gaussa znaleźć rozwiązanie ogólne.

Zsd. 3. Określić, dla jakich $\gamma \in \mathbb{R}$ dany układ równań jest sprzeczny / niesprzeczny / oznaczony:

$$\begin{cases} x - 5y + \gamma^2 z = -3, \\ 2x + 2y - \gamma^2 z = 3\gamma, \\ -4x + 3y + z = -5. \end{cases}$$

Zad. 4. Dany jest układ równań

$$\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Stosując eliminację Gaussa znaleźć rozwiązanie ogólne.

Zad. 5. Określić dla jakich wartości parametru $b \in \mathbb{R}$ układ równań

$$\begin{cases} (1+b)x + y + z = 1, \\ x + (1+b)y + 1 = b, \\ x + y + (1+b)z = b^2, \end{cases}$$

jest sprzeczny / niesprzeczny / oznaczony.

Zad. 6. Dla liczby rzeczywistej a rozważamy układ równań

$$\begin{cases} ax - y - z = 2a + 1, \\ -ax + ay + 2z = -a - 1, \\ ax - y + az = 4a + 1. \end{cases}$$

Zbadać, dla jakich wartości parametru a ten układ równań ma

(a) co najmniej jedno rozwiązanie;

- (b) nie ma rozwiązań;
(c) ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Zad. 7. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

i $\vec{b} = [10, 24, 36, 40, 44]$, $\vec{c} = [0, 0, 0, 1, 2]^T$. Znaleźć rozwiązania układów równań

- (a) $A\vec{x} = \vec{b}$;
(b) $A\vec{x} = \vec{c}$.

Zad. 8. Stosując eliminację Gaussa, wyznaczyć wszystkie rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 2, \\ 3x_1 - 5x_2 + 8x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 5, \\ 4x_1 - 8x_2 + 8x_3 + 5x_4 + 10x_5 = 5. \end{cases}$$